Wie lang kann ein Seil werden.

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 12. September 2012 – Letzte Revision: 28. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Problemstellung

[001]

Problemstellung

Wie lang kann ein Seil sein? So lang, wie es der Kunde bestellt! Macht das Sinn? Ein Seil als druckschlaffes konstruktives Element wird vorzugweise auf Zug beansprucht. Überschreitet infolge dieser Belastung die Spannung im Innern des Seiles die Bruchspannung des verwendeten Materials, ist das Seil Geschichte.

Liegt das Seil nicht nur auf dem Boden und korrodiert, sondern wird es benutzt, muss es von Zeit zu Zeit von A nach B transportiert werden. Auf einer Trommel aufgerollt kein Problem. Jedoch irgendwann kommt der Punkt, wo es ausgerollt am Haken eines Kranes, zum Beispiel, hängt.

Da stellt sich die Frage: „Wie lang kann ein Seil sein?“ „Kürzer, als der Kran hoch ist.“, das ist eine triviale Antwort. Die nichttriviale Antwort ist: „So lang, bis es infolge des Eigengewichtes am Anfang, hier der Kranhaken, reißt.“

... und wie lang ist es dann (gewesen)?

Unter der Annahme, dass das Seil rund und homogen aufgebaut ist, besitzt es die Querschnittsfläche A von:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Mit d dem Durchmesser des Seils. Sein Volumen ist definiert durch:

$$V = A \cdot L$$

Wobei L die Länge des frei vom Kranhaken herunterhängenden Seils ist. Das Seil hat ein Gewicht, das ist bestimmt durch die Dichte des Seilmaterials.

$$m = \rho \cdot V$$

$\Rightarrow$

$$m = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot L$$

Die Gewichtskraft F ist maximal oben am Kranhaken:

$$F_{MAX} = m \cdot g$$

$\Rightarrow$

$$F_{MAX} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot L \cdot g$$

Der Buchstabe g bezeichnet hier erst einmal die Erdbeschleunigung.

2 Nebenbedingung

Die Nebenbedingung, dass das Seil intakt in einem Stück bleibt, erfordert: Nebenbedingung

$$\frac{F_{MAX}}{A} = \sigma_{MAX} \leq \sigma_{BRUCH}$$

Mit σ_{MAX} die aktuelle, maximale Spannung im Inneren des Seils oben am Kranhaken und σ_{BRUCH} die Bruchspannung des verwendeten Materials.

3 Rückführung auf eine Abhängige

Rückführung

Durch Einsetzten von F_{MAX} und A ergibt sich die maximale Länge, die ein/das Seil haben kann.

$$\frac{\rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot L \cdot g}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \leq \sigma_{BRUCH}$$

$\Rightarrow$

$$\rho \cdot L_{MAX} \cdot g = \sigma_{BRUCH}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} = \frac{\sigma_{BRUCH}}{\rho \cdot g}$$

4 Auswertung

Die maximale Länge ist unabhängig von der Dicke eines Seiles. Lediglich an der Bruchspannung und an der Dichte könnte man etwas ändern. Doch auch dort sind Grenzen gesetzt. Auswertung

Beispiel, das Seil soll eine Trosse sein aus dem Universalstahl S235 früher auch St 37 genannt, der Wald- und Wiesenstahl an sich. Die Dichte beträgt $\rho = 7,86\left[g \cdot cm^{-3}\right] \equiv 7,86 \cdot 10^{-6}\left[kg \cdot mm^{-3}\right]$ und die Bruchspannung $\sigma_{Bruch} = 370\left[N \cdot mm^{-2}\right]$

$$L_{MAX} = \frac{370}{7,86 \cdot 10^{-6} \cdot 9810}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} = 4798,5\,[m]$$

Nicht einmal 5 Kilometer könnte die Trosse lang sein. Falls es so einen langen Kran je gäbe (Stichwort: Knicklänge). In den Orbit kommt man damit nicht.

5 Nachtrag

Nachtrag

Die Behauptung, mit der Höhe nimmt die Erdbeschleunigung ab, ist zwar richtig. Aber bringt sie denn etwas? Das Verhalten der Erdbeschleunigung in Abhängigkeit zur Höhe liegt eine Berechnungsgrundlage[1] vor.

$$g(L) = g_0 + \Delta g \cdot L = 9810 - 3,1 \cdot 10^{-3} \cdot L$$

$\Rightarrow$

$$L^*_{MAX} = \frac{\sigma_{BRUCH}}{\rho \cdot (g_0 - \Delta g \cdot L^*_{MAX})}$$

$\Rightarrow$

$$L^*_{MAX} = \frac{g_0}{2 \cdot \Delta g} - \sqrt{\frac{g_0^2}{4 \cdot \Delta g^2} - \frac{\sigma_{BRUCH}}{\rho \cdot \Delta g}}$$

Die bekannten Werte eingesetzt ergibt sich eine erhöhte, maximale Länge L^*_{MAX} von:

$$L^*_{MAX} = 4805,9\,[m]$$

Das sind exakt $7,4\,[m]$ mehr infolge der Abnahme der Erdbeschleunigung mit der Höhe.

Die Berechnungsgrundlage von L^*_{MAX} soll etwas handlicher gestaltet werden. Es ist bekannt:

$$L_{MAX} = \frac{\sigma_{BRUCH}}{\rho \cdot g_0}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} \cdot g_0 = \frac{\sigma_{BRUCH}}{\rho}$$

Weiterhin mit der Festlegung von:

$$G = \frac{g_0}{\Delta g}$$

Ergibt sich somit für L^*_{MAX}:

$$L^*_{MAX} = \frac{G}{2} - \sqrt{G \cdot \left(\frac{G}{4} - L_{MAX}\right)}$$

Ein Verlängerungsfaktor $+1 \leq v \leq +\infty$ wird definiert um auf eine Variable zu reduzieren:

$$L^*_{MAX} = v \cdot L_{MAX}$$

$\Rightarrow$

$$v \cdot L_{MAX} = \frac{G}{2} - \sqrt{G \cdot \left(\frac{G}{4} - L_{MAX}\right)}$$

Umstellen![2]

$$\frac{G}{L_{MAX}} = \frac{v^2}{v-1}$$

Mit der nun bekannten Relation für $v; G$ und L_{MAX} kann auf Planetensuche gegangen werden, wo es möglich ist, sich am Seil hinauf in den Orbit zu hangeln, ohne dass es unterwegs reißt.

:)

[1] Herleitung siehe am Ende dieses Dokuments
[2] siehe auch Anmerkung 2

Aber da gibt es ein Problem. Für eine möglichst lange Trosse sollte im vornherein für $L_{MAX} \to MAX$ gelten und:

$$\frac{G}{L_{MAX}} \propto \frac{1}{L_{MAX}} = \frac{1}{MAX} = MIN$$

Der Ausdruck $v^2/(v-1)$ besitzt jedoch kein globales Minimum. Nur ein lokales bei $v = 2$:

$$\left(\frac{v^2}{v-1}\right)_{MIN} = 4$$

Dieses Minimum ist äußerst ungünstig gelegen und nicht ausreichend für eine genügend lange Trosse in den Orbit.

Auf die Abnahme der die Trosse belastende Gravitation bzw. die daraus resultierende Gewichtskraft zu setzen, besitzt keine ausreichende längenmaximierende Wirkung.

Aber wir wollen optimistisch bleiben und in naher Zukunft wird σ_{BRUCH} das geringere Problem darstellen.[3]

Anmerkung 1:

Die Erdbeschleunigung nimmt gemäß $1/r^2$ ab. Für kleine Intervalle kann jedoch linearisiert werden. Die Berechnungsgrundlage hierfür lautet dann:

$$g(r) = \gamma \cdot \frac{m_E}{r^2}$$

$\Rightarrow$

$$g_0 = \gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta g \approx \frac{d}{dr} \cdot g_0 = -2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^3}$$

$\Rightarrow$

$$g(L) = g_0 + \Delta g \cdot L = g_0 - 2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^3} \cdot L$$

Wobei $\gamma = 6,6725985 \cdot 10^{-11} \left[Nm^2/kg^2\right]$ die universelle Gravitationskonstante darstellt und $r_E = 6,36 \cdot 10^6\,[m]$ den Erdradius und deren Masse $m_E = 5,98 \cdot 10^{24}\,[kg]$.

Schaut man zufällig scharf auf obige Gleichung, dann wird man erkennen, dass gelten muss:

$$-\frac{1}{G} = \frac{\Delta g}{g_0} = -2 \cdot \frac{\gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^3}}{\gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^2}}$$

$\Rightarrow$

$$r_E = 2 \cdot G$$

Anmerkung 2:

Aus

$$\frac{G}{L_{MAX}} = \frac{v^2}{v-1}$$

kann man bei Bedarf und langer Weile eine materialunabhängige, limitierende Länge L_{MAX}^{**} ermitteln, indem man L_{MAX} wieder resubstituiert.

$$L_{MAX}^{*} = v \cdot L_{MAX}$$

[3] An alle Metallurgen, Stahlbauer, Visionäre, ... mir sind Fließ- und Streckgrenze, Spröd- und Dauerbruch, Querdehnung und Versetzungen, ... durchaus bekannte Begriffe, jedoch hier geht es lediglich um einen Überblick und keine konsistente Theorie zukünftiger Weltraumlifte.

$\Rightarrow$

$$\frac{G}{L^*_{MAX}} = \frac{v}{v-1}$$

$\Rightarrow$

$$L^*_{MAX} = \frac{v-1}{v} \cdot G$$

Es wird der Grenzwert für $v \to \infty$ gebildet, denn man will hoch hinaus.

$$L^{**}_{MAX} = G$$

Was am Ende zur Schlussfolgerung führt:

$$r_E = 2 \cdot L^{**}_{MAX}$$

$\Rightarrow$

$$L^{**}_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot r_E$$

$\Rightarrow$

$$L^{**}_{MAX} = 3180\,[km]$$

Man bedenke jedoch, dass bei solchen Längen ein linearisiertes Modell sehr gewagt ist. Alles in allem aber immer noch zu kurz, um etwas geostationär aufhängen zu können.

LaTeX