

# Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung.

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.  
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 25. November 2012 – Letzte Revision: 15. Juni 2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Schnittgrößenermittlung durch Stabwerkstheorien verschiedener Ordnungen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Theorie I. Ordnung</b>	<b>4</b>
3.1	Das Biegemoment . . . . .	4
3.2	Die Biegelinie und dessen Ableitungen . . . . .	4
3.3	Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt . . . . .	4
3.4	Die Krümmung $\kappa$ . . . . .	5
3.5	Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$ . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Theorie II. Ordnung</b>	<b>6</b>
4.1	Das Biegemoment - Vorbetrachtung . . . . .	6
4.2	Die Biegelinie und dessen Ableitungen . . . . .	6
4.3	Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt . . . . .	8
4.4	Das Biegemoment . . . . .	8
4.5	Die Krümmung $\kappa$ . . . . .	8
4.6	Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$ . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Theorie III. Ordnung</b>	<b>9</b>
5.1	Die Biegelinie und dessen Ableitungen . . . . .	9
5.2	Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt . . . . .	9
5.3	Das Biegemoment . . . . .	9
5.4	Der Verdrehwinkel $\varphi$ . . . . .	10
5.5	Die Krümmung $\kappa$ . . . . .	10
5.6	Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$ . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Vergleich der Ordnungen</b>	<b>11</b>
6.1	Numerisch . . . . .	11
6.2	Grafisch . . . . .	12

---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Pör87] Hans Pörschmann. Bautechnische Berechnungstabeln für Ingenieure, 1987. Seite 4-12 bis 4-13.

## 1 Einleitung

[001]

Die Berechnung, die Dimensionierung und der Nachweis von Stabwerken ist in ihrer Vorgehensweise geregelt. Schaut man jedoch in betreffende Regelwerke, dann trifft man auf Termini, welche im ersten Augenblick eine wilde Mischung von Berechnungsalgorithmen, Randbedingungen und Theorien vorgibt.

Einleitung

Eine solche Gruppe von Theorien zwischen denen gern innerhalb eines Absatzes hin und hergesprungen wird, sind die Verformungstheorien zwecks Schnittgrößenermittlung.

Im folgenden Verlauf werden diese Theorien an einem einfachen Modell hergeleitet. Zum Zweck, dass man das „Wachsen“ der Berechnungsgrundlagen von Ordnung zu Ordnung gut nachvollziehen kann. So wurde stellenweise (unkommentiert) stark vereinfacht. Manchmal mit Absicht zu stark, so dass wenn man mit anderen Werken vergleicht, dort oberflächlich betrachtet, andere Gleichungen angegeben sind.

Im Folgenden werden am gewählten Fall hergeleitet, ein Knotenmoment und dessen Wirkung als Verformung. Auf andere Schnittgrößen wird nicht eingegangen.

## 2 Schnittgrößenermittlung durch Stabwerkstheorien verschiedener Ordnungen

Entscheidungskriterium ist die Verformung (wie es der Name schon andeutet). So wird unterschieden zwischen drei „Stufen“ der Verformung und damit drei Berechnungsmodellen.

Schnittgrößen

- **Theorie I. Ordnung:** *Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System.* Verformungen werden als nicht vorhanden vorausgesetzt. Es wird näherungsweise am unverformten Balken ein Balkenelement betrachtet und die Kräfte und Momente bilanziert. Sie genügt fast immer den allgemeinen Anforderungen der Statik.
- **Theorie II. Ordnung:** *Gleichgewichtsbedingungen am verformten System.* Verformungen werden als klein vorausgesetzt. Es wird am verformten Balken ein Balkenelement betrachtet, anschließend wird jedoch das mathematische Modell linearisiert. Diese Ordnung wird für Stabilitätsprobleme benötigt, sowie für große Durchbiegungen bei Neigungswinkeln bis etwa  $20^\circ$ .
- **Theorie III. Ordnung:** *Gleichgewichtsbedingungen am stark verformten System.* Verformungen werden als signifikant groß vorausgesetzt. Es wird am verformten Balken ein Balkenelement betrachtet. Eine Linearisierung des mathematischen Modells erfolgt nicht. Sie wird in Sonderfällen benötigt, wie bei sehr großen Durchbiegungen und Neigungswinkeln über  $20^\circ$ .

### 3 Theorie I. Ordnung

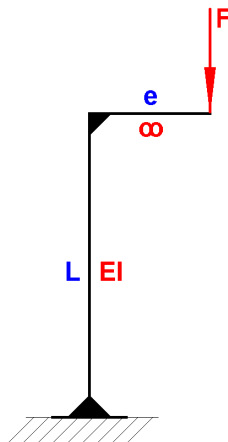


Abbildung 1: Das Modell eines außermittig gedrückten Stabes.

Das Modell des außermittig gedrückten Stabes stellt einen fest eingespannten Stab dar mit einem freien Ende an dessen ein unendlich steifer Kragarm ebenfalls unendlich steif angeeckt eine Last  $F$  im Abstand  $e$  aufnimmt.

I. Ordnung

#### 3.1 Das Biegemoment

In der Theorie I. Ordnung wird jetzt nur das durch  $F$  hervorgerufene Biegemoment  ${}_I M = -F \cdot e$  an der biegesteifen Ecke eine Auslenkung aus der Vertikalen hervorrufen.

Imperfektionen im Vor herein nach DIN EN 1993-1-1 (Stahlbau) oder DIN EN 1992-1-1 (Betonbau) werden Null gesetzt.

#### 3.2 Die Biegelinie und dessen Ableitungen

Dadurch kann die Biegelinie  $w(x)$  durch folgende Berechnungsgrundlage angegeben werden mit  $E$  dem Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes und  $I$  dem Flächenträgheitsmoment um die Biegeachse des verwendeten Profils (Die bei der Integration zu beachtende Konstante  $C$  sind mögliche Imperfektionen, diese werden Null gesetzt durch die Randbedingung  $w(L) = 0$  bei  $F = 0$ ).

$${}_I w''(x) = -\frac{F \cdot e}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad {}_I w''(x) = \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

$\Rightarrow$

$${}_I w'(x) = x \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} + C_0 \quad \rightarrow \quad {}_I w'(x) = x \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

$\Rightarrow$

$${}_I w(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} + x \cdot C_0 + C_1 \quad \rightarrow \quad {}_I w(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

#### 3.3 Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt

Die Biegelinie ist für jedes Tragwerk individuell zu berechnen. Die maximale Auslenkung  $f_{MAX}$  am Punkt des Momentenangriffs in der biegesteifen Ecke ist somit gegeben:

$${}_I f_{MAX} = {}_I w(L) = \frac{L^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

### 3.4 Die Krümmung $\kappa$

Eine wichtige Kenngröße innerhalb der Theorien ist die Krümmung  $\kappa$  definiert mit:

$${}_I\kappa = -w''(x)$$

$\Rightarrow$

$${}_I\kappa = -\frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

### 3.5 Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$

Zusammenfassend sei das Moment und die maximale Auslenkung nochmals als Proportionen genannt, um später alle drei Theorien vergleichen zu können:

$${}_IM \propto +F \quad {}If_{MAX} \propto +F$$

## 4 Theorie II. Ordnung

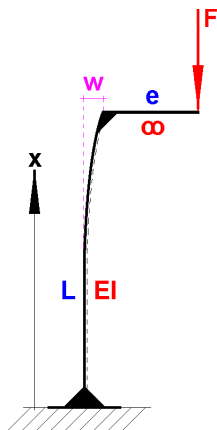


Abbildung 2: Das Modell eines außermittig gedrückten Stabes mit Imperfektion  $w$ .

In der Theorie II. Ordnung werden Imperfektionen nicht mehr im Vorherin Null gesetzt und somit vernachlässigt. Auch die Auslenkung durch die Biegelinie wird berücksichtigt.

II. Ordnung

### 4.1 Das Biegemoment - Vorbetrachtung

So ergibt sich für die Berechnung des Momentes II. Ordnung aus der Angriffskraft:

$${}_{II}M(x) = -F \cdot (e + w_0 - w(x))$$

⇒

$${}_{II}M(x) = -F \cdot \left( e + w_0 - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} - x \cdot C \right)$$

⇒

$${}_{II}M(x) = -F \cdot e \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F}{E \cdot I} \right) - F \cdot (w_0 - x \cdot C)$$

⇒

$${}_{II}M(x) = {}_I M \cdot \alpha - \beta$$

Wobei  ${}_I M$  das Biegemoment aus der Theorie I. Ordnung darstellt, der Koeffizient  $\alpha$  den Einfluss aus der Biegelinie berücksichtigt und  $\beta$  der Koeffizient, welcher Imperfektionen betrachtet.

### 4.2 Die Biegelinie und dessen Ableitungen

Zur Biegelinie, um letztendlich auch  $C$  in  ${}_{II}M(x)$  herzuleiten. Allgemeine Berechnungsgrundlage nun:

$$w''(x) = -\frac{-F \cdot (e + w_0 - w(x))}{E \cdot I}$$

⇒

$$w''(x) = -w(x) \cdot \frac{F}{E \cdot I} + (e + w_0) \cdot \frac{F}{E \cdot I}$$

Dies stellt eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung dar. Der gesamte Lösungsweg dieser DGL wird hier im Text nicht aufgezeigt. Jedes System, jede Stabkonfiguration, jedes Tragwerk mit seinen Besonderheiten besitzt charakteristische Differentialgleichungen die individuell gelöst werden müssen. Hier nur eine grobe Schrittweise. Die DGL in die günstigste Form umgestellt.

$$w''(x) + w(x) \cdot \frac{F}{E \cdot I} = (e + w_0) \cdot \frac{F}{E \cdot I}$$

⇒

$$\lambda^2 + p = S(x)$$

Wenn  $S(x) = 0$ :

$$\lambda = \pm\sqrt{-p} = 0 \pm i \cdot \sqrt{p} = a \pm i \cdot b$$

Da immer  $p > 0$ :

$$a = 0 \quad b = \sqrt{p} = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}$$

Homogene Lösung:

$$w(x)_H = e^{0 \cdot x} \cdot \left[ C_1 \cdot \sin \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) + C_2 \cdot \cos \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) \right]$$

Inhomogener Anteil aus  $S(x) = const.$

$$w(x)_P = C_3$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$w(x) = w(x)_H + w(x)_P$$

$\Rightarrow$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) + C_2 \cdot \cos \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) + C_3$$

Eine Randbedingung ist klar definiert mit  $w(0) = 0$  bei  $x = 0$ .

$$0 = C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0) + C_3$$

$\Rightarrow$

$$-C_2 = C_3$$

$\Rightarrow$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) + C_2 \cdot \left[ \cos \left( x \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \right) - 1 \right]$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind nicht durch einfach zu setzende Randbedingungen ersichtlich. Weitergehende Bedingungen, wie Verdrehungen, zusätzliche Zwangskräfte usw. usf. sind nötig, um die Konstanten zu bestimmen. Es ist entsprechende Literatur zu konsultieren. Für  $C_1$  ist ermittelbar:

$$C_1 = \chi \cdot \varepsilon$$

Mit:

$$\chi = \sqrt{\frac{e}{e+w_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

$\Rightarrow$

$$w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \sin \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + C_2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - 1 \right]$$

Die Konstante  $C_2$  ist komplexer im Aufbau.

$$C_2 = -C_1 \cdot C_2^* = -\chi \cdot \varepsilon \cdot \left[ \frac{\frac{x}{\chi \cdot \varepsilon}}{\cos \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - 1} + \tan \left( \frac{e}{\chi \cdot \varepsilon} \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$${}_{II}w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \left( \sin \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{x}{\chi \cdot \varepsilon} - \tan \left( \frac{e}{\chi \cdot \varepsilon} \right) \cdot \left( \cos \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \right)$$

Diese allgemeingültige, wenn auch recht unhandliche Berechnungsgrundlage kann vereinfacht werden, indem sie um die oben beschriebene Randbedingung taylorisiert wird. Unter der Annahme, dass 3 oder 2 Glieder genügend sind, ergibt sich dann für  ${}_{II}w(x)$ :

$${}_{II}w(x) = -\frac{x^3}{6} \cdot \frac{\chi}{\varepsilon^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \tan \frac{e}{\chi \cdot \varepsilon} + x \cdot (\chi - 1)$$

Eine weitere Vereinfachung ist möglich, wenn angenommen wird, dass der Tangens- Wert klein bleibt, dann gilt:

$$\tan x \approx x$$

⇒

$$IIw(x) = -\frac{x^3}{6} \cdot \frac{\chi}{\varepsilon^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} + x \cdot (\chi - 1) \quad \rightarrow \quad IIw(x) \approx \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} + x \cdot (\chi - 1)$$

⇒

$$IIw'(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{\chi}{\varepsilon^2} + x \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} + (\chi - 1) \quad \rightarrow \quad IIw'(x) \approx x \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} + (\chi - 1)$$

⇒

$$IIw''(x) = -x \cdot \frac{\chi}{\varepsilon^2} + \frac{e}{\varepsilon^2} \quad \rightarrow \quad IIw''(x) \approx \frac{e}{\varepsilon^2}$$

Die Biegelinie ist für jedes Tragwerk individuell zu berechnen.

### 4.3 Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt

Die maximale Auslenkung  $f_{MAX}$  am Punkt des Momentenangriffs in der biegesteifen Ecke ist somit gegeben:

$$II f_{MAX} = IIw(L) = \frac{L^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} + L \cdot \left( \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} - 1 \right)$$

⇒

$$II f_{MAX} = I f_{MAX} + L \cdot (\chi - 1)$$

### 4.4 Das Biegemoment

Das dazugehörige Moment ist jetzt endgültig berechenbar, da die Konstante  $C$  nun bekannt ist.

$$C = \chi - 1 = \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} - 1$$

⇒

$$IIM(x) = IM \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F}{E \cdot I} \right) - F \cdot \left( w_0 + x \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} \right) \right)$$

### 4.5 Die Krümmung $\kappa$

Eine wichtige Kenngröße innerhalb der Theorien ist die Krümmung  $\kappa$  definiert mit:

$$II\kappa = -w''(x)$$

⇒

$$II\kappa = -\frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

⇒

$$II\kappa = I\kappa$$

### 4.6 Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$

Zusammenfassend sei das Moment und die Krümmung nochmals als Proportionen genannt, um später alle drei Theorien vergleichen zu können:

$$IIM \propto +F + \gamma \cdot F^2 \quad II f_{MAX} \propto \delta + F$$

Wobei  $\delta < 1$  ein Absolutglied darstellt (Imperfektionseinfluss) und  $\gamma \gg 1$ .



## 5 Theorie III. Ordnung

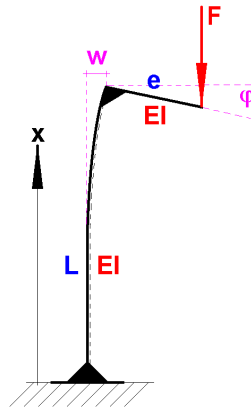


Abbildung 3: Das Modell eines außermittig gedrückten Stabes mit Imperfektion  $w$  und der Verdrehung  $\varphi$ .

In der Theorie III. Ordnung werden Verdrehungen mit betrachtet. Als im vorliegenden Beispiel einzige relevante Verdrehung ist die von  $\varphi$  um die biegegesteife Ecke herum. Diese Verdrehung ist im vorliegenden Fall momentenabschwächend und die einzige somit voneinander unabhängige. In komplexen Stabwerken mit vielen Verdrehwinkeln die untereinander abhängig sind, ist eine analytische Methode oft nicht mehr zeitabschätzbar möglich. Hier beginnt dann die Anwendung von FEM.

III. Ordnung

Der Übergang von II. zu III. Ordnung ist ein Substitut von  $e$ :

$$III e = e \cdot \cos \varphi$$

### 5.1 Die Biegelinie und dessen Ableitungen

Die Biegelinie  $w(x)$  ergibt sich dann mit:

$$III w(x) \approx \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e \cdot \cos \varphi}{\varepsilon^2} + x \cdot (III \chi - 1)$$

$\Rightarrow$

$$III w'(x) \approx x \cdot \frac{e \cdot \cos \varphi}{\varepsilon^2} + (III \chi - 1)$$

$\Rightarrow$

$$III w''(x) = \frac{e \cdot \cos \varphi}{\varepsilon^2} = II w''(x) \cdot \cos \varphi$$

Mit:

$$III \chi = \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + w_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

Die Biegelinie ist für jedes Tragwerk individuell zu berechnen.

### 5.2 Die maximale Auslenkung am Knotenpunkt

Die maximale Auslenkung  $f_{MAX}$  am Punkt des Momentenangriffs in der biegegesteifen Ecke ist somit gegeben:

$$III f_{MAX} = III w(x) = \frac{L^2}{2} \cdot \frac{e \cdot \cos \varphi}{\varepsilon^2} + x \cdot (III \chi - 1)$$

### 5.3 Das Biegemoment

Das Moment  $M$  in Abhängigkeit von  $x$ :

$$III M(x) = -F \cdot e \cdot \cos \varphi \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F}{E \cdot I}\right) - F \cdot \left(w_0 + x \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + w_0}}\right)\right)$$

⇒

$${}_{III}M(x) = {}_I M \cdot \alpha - \beta$$

Innerhalb der Theorie III. Ordnung wird niemals linearisiert. Dazu sind die betrachteten Verformungen und Verdrehungen zu groß um fehlerfreie Ergebnisse zu liefern.

#### 5.4 Der Verdrehwinkel $\varphi$

Wie in der Einleitung schon genannt, geht es aber hier in dieser Abhandlung darum, den Sinn der Theoriengruppe zu erläutern. Deshalb wird die Cosinus- Funktion wenigstens mit 2 Gliedern taylorisiert.

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

⇒

$${}_{III}\chi \approx \chi \cdot \left[ 1 + \frac{\varphi^2}{4} \cdot (\chi^2 - 1) \right]$$

[Pör87]

Bleibt die Frage, welche Werte  $\varphi$  annehmen kann. Die Berechnung der Verdrehung ist möglich durch das Integral  $\int M \bar{M} ds$ . Unter der Prämisse, dass  $E \cdot I = const.$  über den gesamten Stabwerksverlauf ergibt sich für die Verdrehung:

$$\varphi = F \cdot e \cdot \frac{2 \cdot L + e}{2 \cdot E \cdot I}$$

⇒

$$\varphi = -\frac{{}_I M}{2} \cdot \frac{2 \cdot L + e}{E \cdot I}$$

#### 5.5 Die Krümmung $\kappa$

Eine wichtige Kenngröße innerhalb der Theorien ist die Krümmung  $\kappa$  definiert mit:

$${}_{III}\kappa = -\frac{{}_{III}w''(x)}{\sqrt{(1 + {}_{III}w'(x))^2}^3}$$

#### 5.6 Proportionalisierung von $M$ und $f_{MAX}$

Zusammenfassend sei das Moment und die maximale Auslenkung nochmals als Proportionen genannt, um später alle drei Theorien vergleichen zu können ( ${}_{III}f_{MAX}$  und  ${}_{III}M$  taylorisiert um  $F = 0$  mit  $x = L$ ):

$${}_{III}M \propto +F + \gamma \cdot F^2 - \frac{\gamma}{2} \cdot F^3 \quad {}_{III}f_{MAX} \propto \delta + F + 10 \cdot \delta \cdot F^2 - \gamma \cdot F^3$$

Wobei  $\delta < 1$  und  $\gamma \gg 1$  Absolutglied bzw. Linear- bzw. Korrekturfaktoren sind.

## 6 Vergleich der Ordnungen

Ein visueller Vergleich der Theorien I. bis III. Ordnung in Bezug Moment  $M$  und maximaler Auslenkung  $f_{MAX}$  soll diese Darstellung beenden. So ergab sich im Laufe der Abhandlung für die Proportionen:

Vergleich

### 6.1 Numerisch

- **Theorie I. Ordnung:**

$${}_I M \propto +F \quad {}_I f_{MAX} \propto +F$$

- **Theorie II. Ordnung:**

$${}_{II} M \propto +F + \gamma \cdot F^2 \quad {}_{II} f_{MAX} \propto \delta + F$$

Mit

$$\delta < 1 \quad \gamma \gg 1$$

- **Theorie III. Ordnung:**

$${}_{III} M \propto +F + \gamma \cdot F^2 - \frac{\gamma}{2} \cdot F^3 \quad {}_{III} f_{MAX} \propto \delta + F + 10 \cdot \delta \cdot F^2 - \gamma \cdot F^3$$

Mit

$$\delta < 1 \quad \gamma \gg 1$$

## 6.2 Grafisch

- **Grafische Darstellung** der maximalen Auslenkung  $f_{MAX}$  für alle drei Ordnungen.

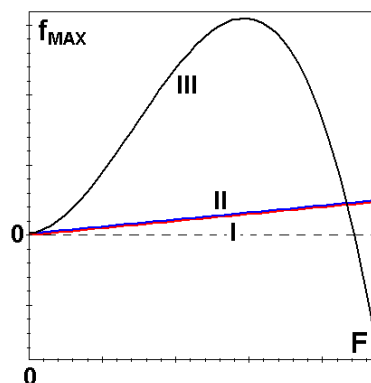


Abbildung 4: Darstellung von  $f_{MAX}$  mit  $\gamma = 2$

- **Grafische Darstellung** des Momentes  $M$  für alle drei Ordnungen in der biegesteifen Ecke.

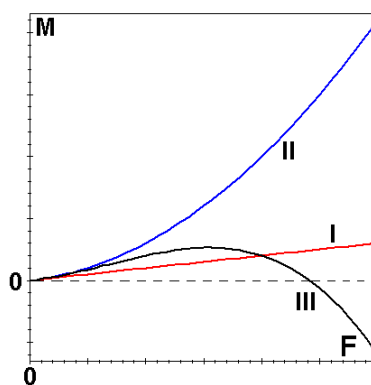


Abbildung 5: Darstellung von  $M$  mit  $\gamma = 2$  und  $\delta = 0.5$

Die Auswirkungen durch Taylorisierung und Proportionalisierung sind für große  $F$  deutlich zu sehen. Eine genauere Betrachtung in einer separaten Abhandlung.

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X