Übergang einer rechtsseitigen Exponentialfunktion zur symmetrischen Variante

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 7. Juni 2021 – Letzte Revision: 8. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Gaußsches Wellenpaket - GWP.

1 Einleitung

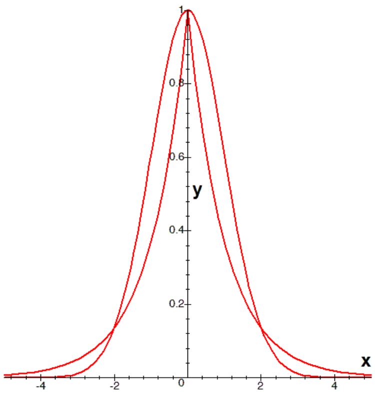
Auf dem Wege in die Tiefen der Physik, insbesondere der Optik und Quantenphysik, kann es vorkommen, dass man auf einen Rechenschritt trifft, bei dem man einen Übergang einer rechtsseitigen Exponentialfunktion der Form $y_r = e^{-a \cdot x}$ zur symmetrischen Variante $y_S = e^{-b \cdot x^2}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ vollziehen muss. In der Literatur wird dann oft vorgeschlagen: [001]ff.

$$y_r = e^{-a \cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_s = e^{-\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2}$$

Also mit:

$$b = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

$\Rightarrow$



In den folgenden Abschnitten soll dieser vorgeschlagene Übergang kurz untersucht werden.

2 Übergang ohne Beachtung der Normierung

$$y_r = e^{-a\cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_S = e^{-b\cdot x^2} \qquad \text{mit} \qquad a > 0 \qquad \text{und} \qquad b > 0$$

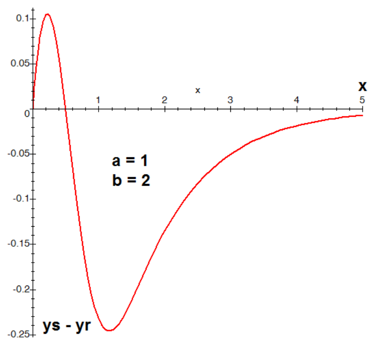
Als erstes wird die Normierung kontrolliert.

$$2 \cdot \int_0^{+\infty} y_r \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-a\cdot x} \cdot dx = \frac{2}{a} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\cdot x^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Es wird die Differenz zwischen beiden Exponentialfunktionen gebildet:

$$y_S - y_r = e^{-b\cdot x^2} - e^{-a\cdot x}$$

Für $b = 2$ und $a = 1$ ergibt sich dann grafisch:



Da der Graf im relevanten rechtsseitigen Gebiet eine Nullstelle besitzt, ist ein Ausgleich möglich. Die Nullstelle liegt bei:

$$e^{-b\cdot x^2} = e^{-a\cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = \frac{a}{b}$$

Es gilt:

$$A = \int_0^{+\infty} (y_S - y_r) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{\sqrt{\pi} \cdot a - 2 \cdot \sqrt{b}}{2a \cdot \sqrt{b}}$$

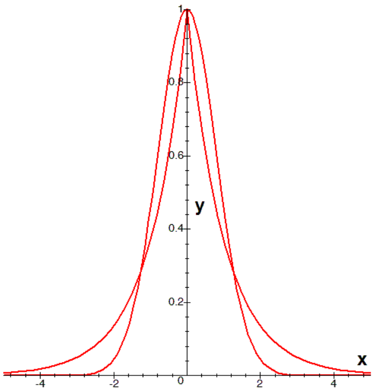
Welcher Fall erzeugt ein $A = 0$, was der Gleichheit der oberen und der unteren Fläche entspricht.

$$b = \frac{\pi}{4} \cdot a^2$$

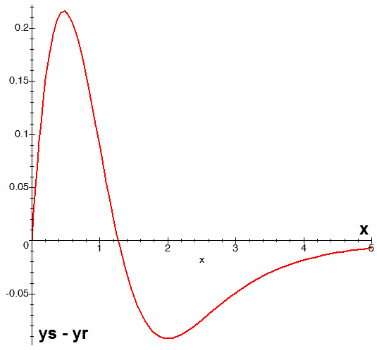
Damit ist ein exakter Übergang definiert:

$$y_r = e^{-a\cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_s = e^{-\frac{\pi}{4}\cdot a^2 \cdot x^2}$$

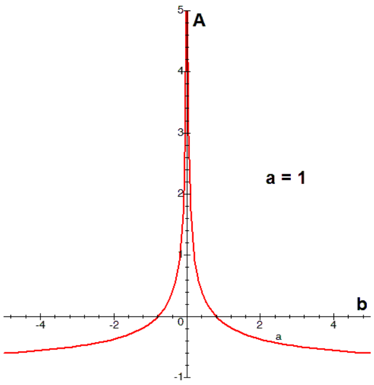
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



Zum Schluss wird die Normierung nochmals überprüft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{4} \cdot a \cdot x^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

3 Übergang unter Beachtung von Vorkoeffizienten

$$y_r = c \cdot e^{-a \cdot x} \quad \rightarrow \quad y_S = d \cdot e^{-b \cdot x^2} \quad \text{mit} \quad a > 0, b > 0, c > 0 \quad \text{und} \quad d > 0$$

Als erstes wird die Normierung kontrolliert.

$$2 \cdot \int_0^{+\infty} y_r \cdot dx = 2c \cdot \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot x} \cdot dx = 2 \cdot \frac{c}{a} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = d \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b \cdot x^2} \cdot dx = d \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Es wird die Differenz zwischen beiden Exponentialfunktionen gebildet:

$$y_S - y_r = d \cdot e^{-b \cdot x^2} - c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Da der Graf im relevanten rechtsseitigen Gebiet eine Nullstelle besitzt, ist ein Ausgleich möglich. Die Nullstelle liegt bei:

$$d \cdot e^{-b \cdot x^2} = c \cdot e^{-a \cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - \frac{a}{b} \cdot x - \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{d}{c} = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{a}{2b} \pm \frac{1}{2b} \cdot \sqrt{a^2 + 4b \cdot \ln \frac{d}{c}}$$

Es gilt:

$$A = \int_0^{+\infty} (y_S - y_r) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{2 \cdot c \cdot \sqrt{b} - a \cdot d \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot a \cdot \sqrt{b}}$$

Welcher Fall erzeugt ein $A = 0$?

$$b_{neu} = \frac{a_{alt}^2 \cdot d_{neu}^2}{c_{alt}^2} \cdot \frac{\pi}{4} \qquad d_{neu} = \frac{2 \cdot c_{alt} \cdot \sqrt{b_{neu}}}{a_{alt} \cdot \sqrt{\pi}}$$

Damit kann zugeordnet werden:

$$a_{alt} = b_{neu} = \frac{a_{alt}^2 \cdot d_{neu}^2}{c_{alt}^2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{2c}{\sqrt{a \cdot \pi}}$$

Sowie:

$$c_{alt} = d_{neu} = \frac{2 \cdot c_{alt} \cdot \sqrt{b_{neu}}}{a_{alt} \cdot \sqrt{\pi}}$$

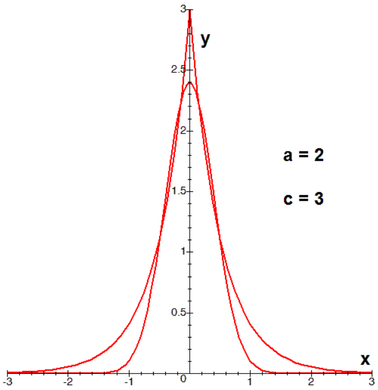
$\Rightarrow$

$$b = \frac{\pi}{4} \cdot a^2$$

Damit ist ein exakter Übergang definiert:

$$y_r = c \cdot e^{-a \cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_S = \frac{2c}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\pi}{4} \cdot a^2 \cdot x^2}$$

$\Rightarrow$



Zum Schluss wird die Normierung nochmals überprüft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = \frac{2c}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{4} \cdot a^2 \cdot x^2} \cdot dx = 4 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a \cdot \pi}}$$

4 Übergang unter Beachtung der Normierung

$$y_r = \frac{a}{2} \cdot e^{-a \cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_S = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot e^{-b \cdot x^2}$$

Die Normierungen:

$$2 \cdot \int\limits_0^{+\infty} y_r \cdot dx = a \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-a \cdot x} \cdot dx = 1 \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b \cdot x^2} \cdot dx = 1$$

Es wird die Differenz zwischen beiden Exponentialfunktionen gebildet:

$$y_S - y_r = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot e^{-b \cdot x^2} - \frac{a}{2} \cdot e^{-a \cdot x}$$

Die Nullstellen liegen bei:

$$\sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot e^{-b \cdot x^2} = \frac{a}{2} \cdot e^{-a \cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \frac{a}{2b} \pm \frac{1}{2b} \sqrt{a^2 + 4b \cdot \ln\left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{b}{\pi}}\right)}$$

Da die Funktion im rechtsseitigen Gebiet eine Nullstelle besitzt, ist ein Ausgleich möglich. Es gilt:

$$A = \int\limits_0^{+\infty} (y_S - y_r) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = 0$$

Damit steht fest, dass die Fläche schon optimiert ist[1], somit gilt aus den Vorkoeffizienten:

$$\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

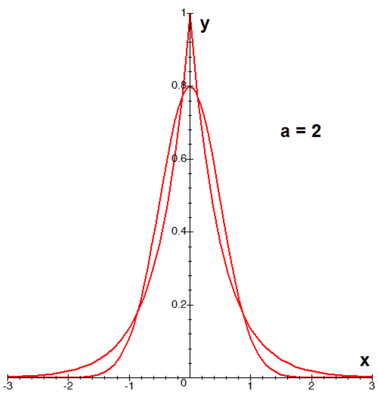
Damit ist ein exakter Übergang definiert [2]:

$$y_r = \frac{a}{2} \cdot e^{-a \cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_S = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2}$$

Zum Schluss wird die Normierung nochmals überprüft:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_s \cdot dx = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2} \cdot dx = 1$$

$\Rightarrow$



[1] Was zu erwarten war, weil beide normiert sind.

[2] y_s ist jetzt äquivalent zum Gaußschen Wellenpaket im Frequenzraum sobald man $x \rightarrow \omega$ setzt.[Dip]

5 Zusammenfassung

Der in der Literatur angegebene Übergang

$$y_r = e^{-a \cdot x} \qquad \rightarrow \qquad y_s = e^{-\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2}$$

mit

$$b = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

ist exakt, was zu erwarten war. Eine genauere Betrachtung innerhalb eines speziellen Falls ist jedoch nicht umsonst, um Unschärfen zu vermeiden.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$