

Arbeitsblatt

Bildauswertung am Spektrografen

www.Zenithpoint.de

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 28. Mai 2013 – Letzte Revision: 15. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Allgemeiner Aufbau	4
3	Auswertungsmöglichkeit(en)	5
3.1	Als Polynom $p(\bar{x})$	6
3.2	Als Funktional $F(\bar{x})$	7
4	Erläuterungen	8
4.1	Die Rolle des Korrelationskoeffizienten $\rho_{x\lambda}$	8
4.2	Der Korrelationskoeffizient $\rho_{x\lambda}$ im Allgemeinen	10
4.3	Der Korrelationskoeffizient $\rho_{x\lambda}$ im Besonderen	11
4.4	Auswertung des Funktionals $F(\bar{x})$ als lineare Funktion	12
4.5	Die Empfindlichkeit des Detektors als Einfluss auf $\varphi(\lambda)$	13
5	Räumliche Dispersion.	14
5.1	Ermitteln der räumlichen Dispersion über das Funktional $F(\bar{x})$	14
5.2	Justage von Δx	15
5.3	Justage von $\Delta \lambda$	16
5.4	Festlegen der Art der Verteilung $\varphi(\lambda)$	17
5.5	Festlegen der Art der Verteilung $\varphi(x)$	18
6	Beispiele	19
6.1	Zweidimensionale Verteilung ohne Schiefe	19
6.2	Zweidimensionale Verteilung mit beidseitiger Schiefe	21
6.3	Originalbild des vorhandenen Spektrografen	23

Literatur

- [Göh87] Wilhelm Göhler. Höhere Mathematik. Verlag Harri Deutsch, 1987. 10. Auflage.
- [JE10] H.-J. Eichler J. Eichler. Laser - Bauformen, Strahlführungen, Anwendungen. Springer-Verlag, 2010. 7. Auflage.
- [NWS73] L. W. Dunin-Barkowski N. W. Smirnow. Mathematische Statistik in der Technik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973. 3. Auflage.
-

1 Einleitung

Aufgabe ist das Erfassen und Auswerten eines Kamerabildes als Detektor und Endpunkt eines Spektrografen innerhalb des SAW- Projektes 2012 am MBI.

Einleitung

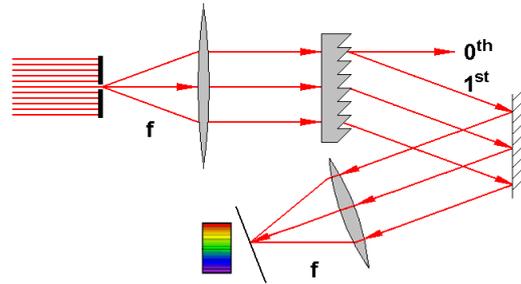
Dadurch soll im weiteren Verlauf ein Ablesen der aktuellen Dispersion möglich sein.

Zu diesem Zweck ist es notwendig aus dem aufgenommenen Bild eine Funktion zu berechnen, welche den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Ort beschreibt.

Dadurch ist es im darauffolgenden Schritt möglich, die räumliche Dispersion zu berechnen.

Zur Zeit ist der Spektrograf nicht justiert, dadurch ist es (noch) nicht möglich den direkten Zusammenhang von Ort x und Wellenlänge λ zu beschreiben. Jedoch kann über die Pixel(anzahl) Pix der Kamera eine vorläufige, parametrische Beschreibung erfolgen.

2 Allgemeiner Aufbau



Allgemeiner Aufbau des genutzten Spektrografen.

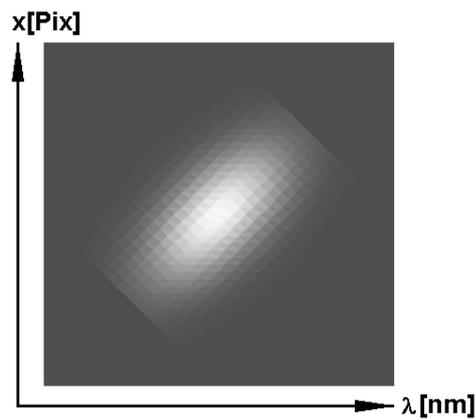
Aufbau

Ein Laserstrahl mit $1,5\mu\text{m}$ -Wellenlänge fällt auf einen Blendschlitz und wird von nachfolgender Kollimatorenlinse gesammelt und planparallel weitergegeben an ein optisches Gitter. Die Interferenzen 1. Ordnung werden anschließend durch einen Spiegel aussortiert und weiter geschickt an eine Sammellinse, welche das zu analysierende Licht einer IR-empfindlichen Kamera weiterreicht, die mit einem speziellen phosphorbeschichteten CCD-Chip ausgestattet ist.

Ergebnis ist eine Funktion f zwischen Ort x und die Wellenlänge λ auf dem Chip.

$$f : \lambda [\text{nm}] \rightarrow x [\text{Pix}]$$

⇒



Ein mögliches Ausgabebild des Spektrografen.

3 Auswertungsmöglichkeit(en)

- Was soll ausgewertet werden?
- Was ist gesucht?
- Welche Methode?

Auswertung

[NWS73]

3.1 Als Polynom $p(\bar{x})$

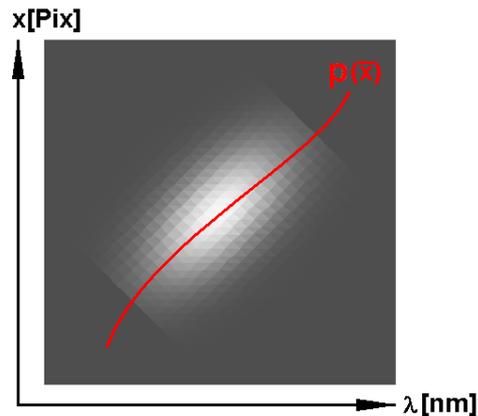
Das Polynom p der Linienschwerpunkte \bar{x} welche aus den Intensitätsfunktionen $I(x)$ ermittelt werden.

$$p(\bar{x}) = p\left(\frac{\int x \cdot I(x) dx}{\int I(x) dx}\right)$$

Da $I(x)$ als analytischer Ausdruck unbekannt ist, wird das CCD- Abbild (ersatzweise) zeilenweise x_i abgetastet und der Linienschwerpunkt $P_i(\lambda_i, x_i)$ ermittelt, welcher dann das Polynom p definiert.

$$p(\bar{x}) = p(P_i)$$

⇒



Ein mögliches Ausgabebild des Spektrografen mit dem eingezeichneten Polynom als Repräsentant der Linienschwerpunkte.

Problem! Die so ermittelte Funktion ist ein Polynom mit $MAX(i)$ -ter Ordnung, welches einen hohen Rechen- und Zeitaufwand erwirkt.

Das zu erwartende Polynom p hat die allgemeine Form:

$$p(\bar{x}) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

Damit besitzt die später zu ermittelnde Dispersion als Ableitung p' des Polynoms p eine Wellenlängenabhängigkeit für ein λ_0 .

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \alpha \right|_{\lambda_0}$$

3.2 Als Funktional $F(\bar{x})$

Wenn ein lineares Polynom ausreichend ist, dann kann die Betrachtung der CCD- Abbildung als zweidimensionale Verteilung zu einer schnellen Ermittlung eines Funktionals $F(\bar{x})$ führen und damit die Bildauswertung beschleunigen.

$$f : \lambda [nm] \rightarrow x [Pix]$$

⇒

$$F : \varphi(\lambda [nm]) \rightarrow \varphi(x [Pix])$$

Dann ist $F(\bar{x})$ beschreibbar durch:

$$F : \frac{\lambda - \mu_\lambda}{\sigma_\lambda} \xrightarrow{\rho_{x\lambda}} \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

⇒

$$x = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

Mit:

μ_x	=	Mittelwert der Verteilung $\varphi(x)$
μ_λ	=	Mittelwert der Verteilung $\varphi(\lambda)$
σ_x	=	Standardabweichung der Verteilung $\varphi(x)$
σ_λ	=	Standardabweichung der Verteilung $\varphi(\lambda)$
$\rho_{x\lambda}$	=	Linearer Korrelationskoeffizient zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$

Alle notwendigen Größen sind statistische Standardkomponenten und routinemäßig ermittelbar.

Das zu erwartende Funktional F hat die allgemeine Form:

$$F(\bar{x}) = a_1 \cdot \lambda + a_0$$

Damit besitzt die später zu ermittelnde Dispersion als Ableitung F' des Funktionals F keine Wellenlängenabhängigkeit für ein λ_0 .

$$\frac{d}{d\lambda} \alpha$$

4 Erläuterungen

4.1 Die Rolle des Korrelationskoeffizienten $\rho_{x\lambda}$

ρ - Koeffizient

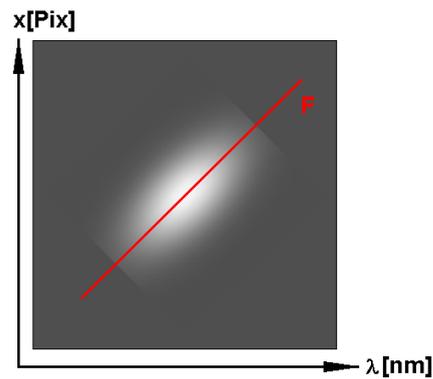
Mit dem Korrelationskoeffizienten $\rho_{x\lambda}$ können Spezialfälle beschrieben werden.

- Aus $\rho_{x\lambda} = 1$ folgt eine vollständige positive Kovarianz zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

$$x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

⇒

$$x \propto \lambda$$



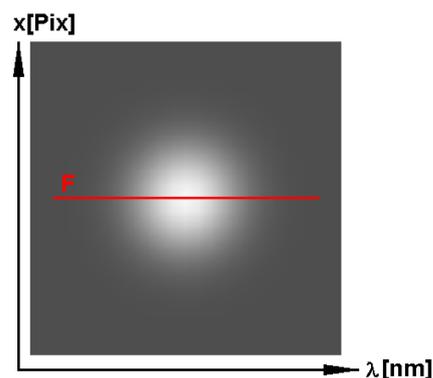
Mit $\rho_{x\lambda} = 1$ folgt eine vollständige positive Kovarianz zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

- Aus $\rho_{x\lambda} = 0$ folgt eine vollständige Unabhängigkeit zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

$$x = \mu_x$$

⇒

$$x \propto \text{const.}$$



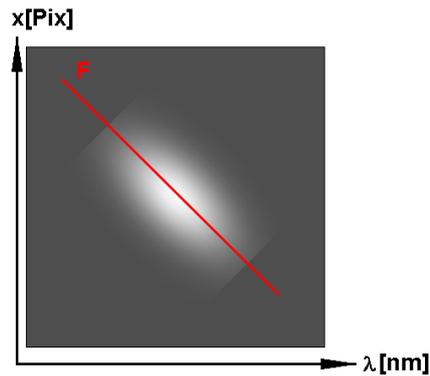
Mit $\rho_{x\lambda} = 0$ folgt eine vollständige Unabhängigkeit zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

- Aus $\rho_{x\lambda} = -1$ folgt eine vollständige negative Kovarianz zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

$$x = -\frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda + \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

⇒

$$x \propto -\lambda$$



Mit $\rho_{x\lambda} = -1$ folgt eine vollständige negative Kovarianz zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

- Ist ein F definiert, welches parallel zur x - Achse (hier Ordinate) liegt?

Dann muss gelten:

$$\rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \rightarrow \pm\infty$$

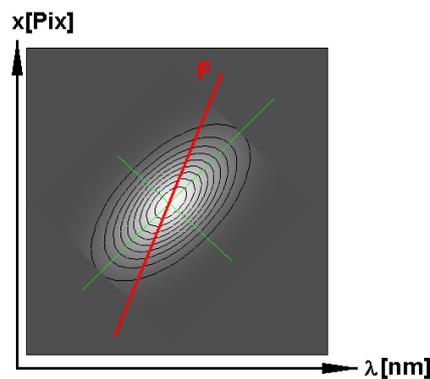
⇒

$$\sigma_\lambda \rightarrow 0$$

Was einer monochromatischen Strahlungsquelle entspricht.

- Hauptachsen und das Funktional F .

Zu beachten ist, dass die Hauptachsen der zweidimensionalen Verteilung insbesondere die Hauptachse der Höhenlinienellipsen nicht zusammenfallen müssen mit dem Funktional F . Geht $\rho_{x\lambda} \rightarrow 1$ besitzt die Hauptachse einen Winkel von $\frac{1}{4}\pi$ zur Abszisse, das Funktional jedoch den Anstieg $\frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda}$, was nur dann identisch $\frac{1}{4}\pi$ ist, wenn $\sigma_x = \sigma_\lambda$. Es ist daher immer zu unterscheiden zwischen den geometrischen Achsen der Höhenlinienellipsen und dem Funktional F als Repräsentant der Linienschwerpunkte.



Die zwei Hauptachsen der Höhenlinienellipsen und das Funktional F .

4.2 Der Korrelationskoeffizient $\rho_{x\lambda}$ im Allgemeinen

Der Korrelationskoeffizient $\rho_{x\lambda}$ ist definiert als:

$$-1 \leq \rho_{x\lambda} = \frac{\text{cov}(x, \lambda)}{\sigma_x \cdot \sigma_\lambda} \leq +1$$

Mit $\text{cov}(x, \lambda)$ der Kovarianz zwischen den Verteilungen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$.

4.3 Der Korrelationskoeffizient $\rho_{x\lambda}$ im Besonderen

Eine separate Berechnung von $\rho_{x\lambda}$ für vorliegenden Versuchsaufbau ist nicht nötig, da $\rho_{x\lambda}$ global abgeschätzt werden kann. Die Verteilungen $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$ werden im gleichen Versuchsaufbau generiert und entstammen vom selben Laserstrahl. Damit sind $\varphi(x)$ und $\varphi(\lambda)$ vollständig korreliert:

$$\rho_{x\lambda} = \frac{\text{cov}(x, \lambda)}{\sigma_x \cdot \sigma_\lambda} = 1$$

\Rightarrow

$$\text{cov}(x, \lambda) = \sigma_x \cdot \sigma_\lambda$$

\Rightarrow

$$x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

4.4 Auswertung des Funktionals $F(\bar{x})$ als lineare Funktion

Gegeben ist das Funktional F als lineare Funktion:

$$x = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x \quad \rightarrow \quad y = m \cdot x + n$$

\Rightarrow

$$m = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \quad n = \mu_x - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda$$

Mit:

$$\begin{aligned} m &= \text{Steigung von } F \\ n &= \text{Inhomogenität von } F \end{aligned}$$

Die Inhomogenität ist dann Null, wenn gilt:

$$\rho_{x\lambda} = \frac{\mu_x}{\mu_\lambda} \cdot \frac{\sigma_\lambda}{\sigma_x}$$

\Rightarrow

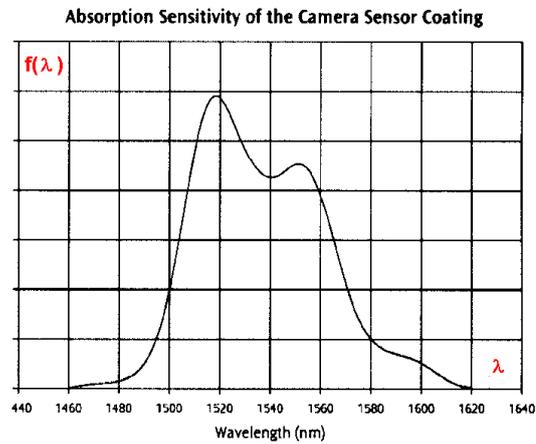
$$\text{cov}(x, \lambda) = \frac{\mu_x}{\mu_\lambda} \cdot \sigma_\lambda^2$$

4.5 Die Empfindlichkeit des Detektors als Einfluss auf $\varphi(\lambda)$

Die CCD- Kamera besitzt keine konstante Empfindlichkeit über die gesamte zu betrachtende Wellenlänge. Daher ist die Funktion $f(\lambda)$ in der (quantitativen) Auswertung heraus zu rechnen.

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda \circ f(\lambda))$$

⇒



5 Räumliche Dispersion.

5.1 Ermitteln der räumlichen Dispersion über das Funktional $F(\bar{x})$

Dispersion

Das Ermitteln der räumlichen Dispersion erfolgt über das Funktional F .

$$x = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

 \Rightarrow

$$\Delta x = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \Delta \lambda$$

 \Rightarrow

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} = \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda}$$

Für den unjustierten Spektrografen ist die Einheit von $\frac{\Delta x}{\Delta \lambda}$ der räumlichen Dispersion $\left[\frac{Pix}{Pix} = 1\right]$. Durch Justage der Wellenlänge λ zu Pix und Ort x zu Pix ist ein quantitativer Wert angebar.

$$\left[\frac{Pix}{Pix}\right] = \left[\frac{\Delta Pix}{\Delta Pix}\right] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta \lambda}\right]$$

5.2 Justage von Δx

Die Länge L des vollständig und bündig beleuchteten Blendschlitzes ist bekannt. Die maximale Anzahl der Pixel Pix_{MAX} die L aufnimmt ist ebenfalls bekannt.

$$\Delta x = \frac{\Delta L}{\Delta Pix}$$

5.3 Justage von $\Delta\lambda$

Eine schmalbandige Strahlungsquelle λ_1 erzeugt einen Peak im interessierenden Bereich bei Pix_1 . Eine zweite schmalbandige Strahlungsquelle λ_2 erzeugt einen weiteren Peak bei Pix_2 .

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{Pix_1 - Pix_2} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta Pix}$$

Nach Justage ist die Einheit der Dispersion:

$$\left[\frac{\Delta x}{\Delta\lambda} \right] = \left[\frac{\Delta L}{\Delta Pix} \cdot \frac{\Delta Pix}{\Delta\lambda} \right] = \left[\frac{\text{mm}}{\text{nm}} \right]$$

Ist die Brennweite B der dem Detektor vorgelagerten Linse bekannt, ist umstellbar auf eine Winkelangabe.

$$\tan \alpha = \frac{L}{2B}$$

\Rightarrow

$$\Delta\alpha = \arctan \frac{\Delta L}{2B}$$

Die Einheit der räumlichen Dispersion $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\lambda}$ ist dann $\left[\frac{\mu\text{rad}}{\text{nm}} \right]$.

5.4 Festlegen der Art der Verteilung $\varphi(\lambda)$

[JE10]

Einen monochromatischen Strahler beschreibt das Lorentz- Profil, für vorliegendes Kontinuum ist eine Normalverteilung zu vermuten mit charakteristischer Schiefe und/oder Exzess an den Seitenbändern, welche am konkreten Fall auszutesten sind um σ_λ zu ermitteln.

[JE10]

5.5 Festlegen der Art der Verteilung $\varphi(x)$

Ein Laser mit zylindrischem Querschnitt hat die Strahlintensität eines Gauß- Profils für die TEM₀₀-Mode. Andere Profile, die sich durch Laguerre- Polynome berechnen lassen, sind möglich. Im Extremfall auch rechteckige Symmetrien, die sich durch Hermitesche- Polynome definieren lassen. Dadurch ist bei der Anpassung von $\varphi(x)$ an den speziellen Anwendungsfall mit der Kombination von Gleich- und Normalverteilung zu rechnen, um σ_x zu ermitteln.

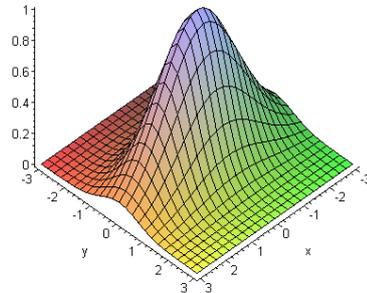
6 Beispiele

6.1 Zweidimensionale Verteilung ohne Schiefe

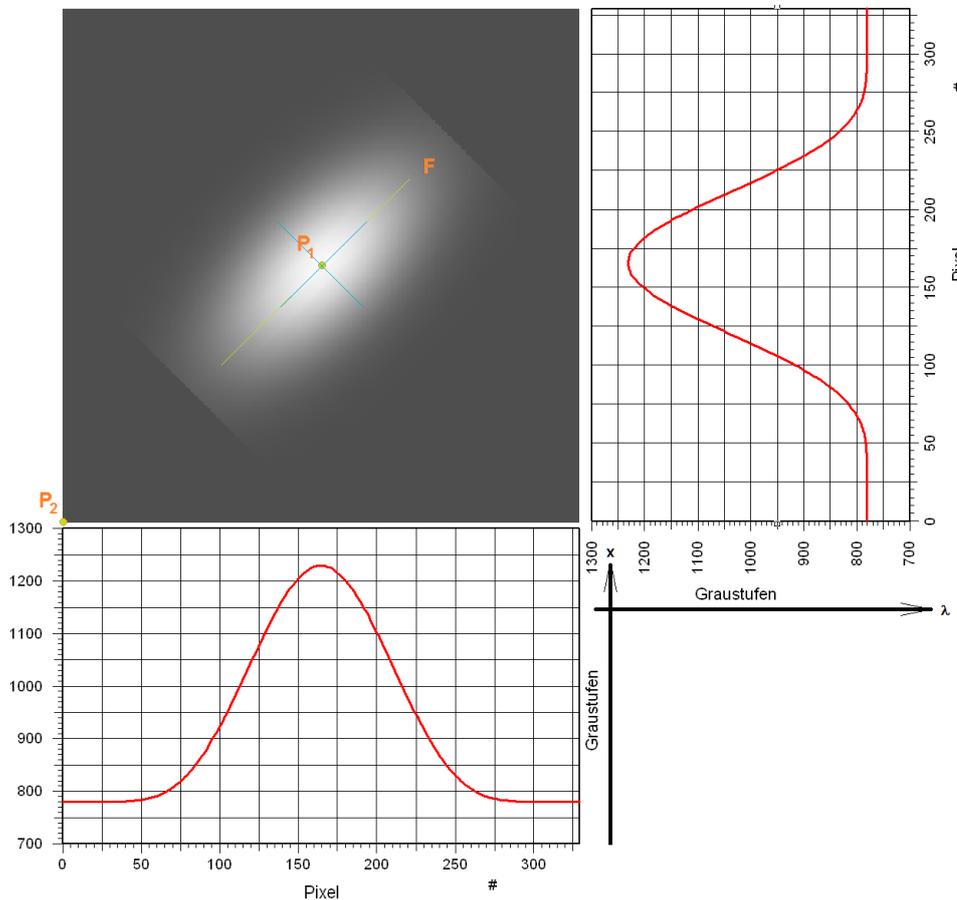
[Göh87]

Beispiele

$$z = e^{-\frac{1}{4} \cdot \lambda^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad \rho_{x\lambda} \rightarrow +1$$



Beispiel 1, Zweidimensionale Normalverteilung ohne Schiefe.



Beispiel 1, Ausgewertet.

Ermittelte Werte:

$$\begin{aligned} \mu_x &= 165,6 & \sigma_x &= 49,9 \\ \mu_\lambda &= 164,5 & \sigma_\lambda &= 50,1 \end{aligned}$$

Ermittlung des Funktionals F .

$$x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

⇒

$$x = \lambda - 1,1$$

Grafische Darstellung von F über zwei Punkte. Sofort bekannt ist P_1 :

$$P_1(\mu_\lambda; \mu_x) = P_1(165; 166)$$

Der Punkt P_2 ist zweckmäßig ermittelbar an der Stelle $x = 0$.

$$0 = \lambda - 1, 1$$

\Rightarrow

$$\lambda_{x=0} = 1, 1$$

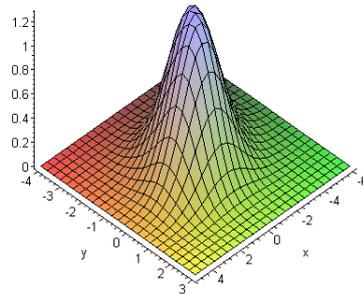
\Rightarrow

$$P_2(\lambda_{x=0}; 0) = P_2(1, 1; 0)$$

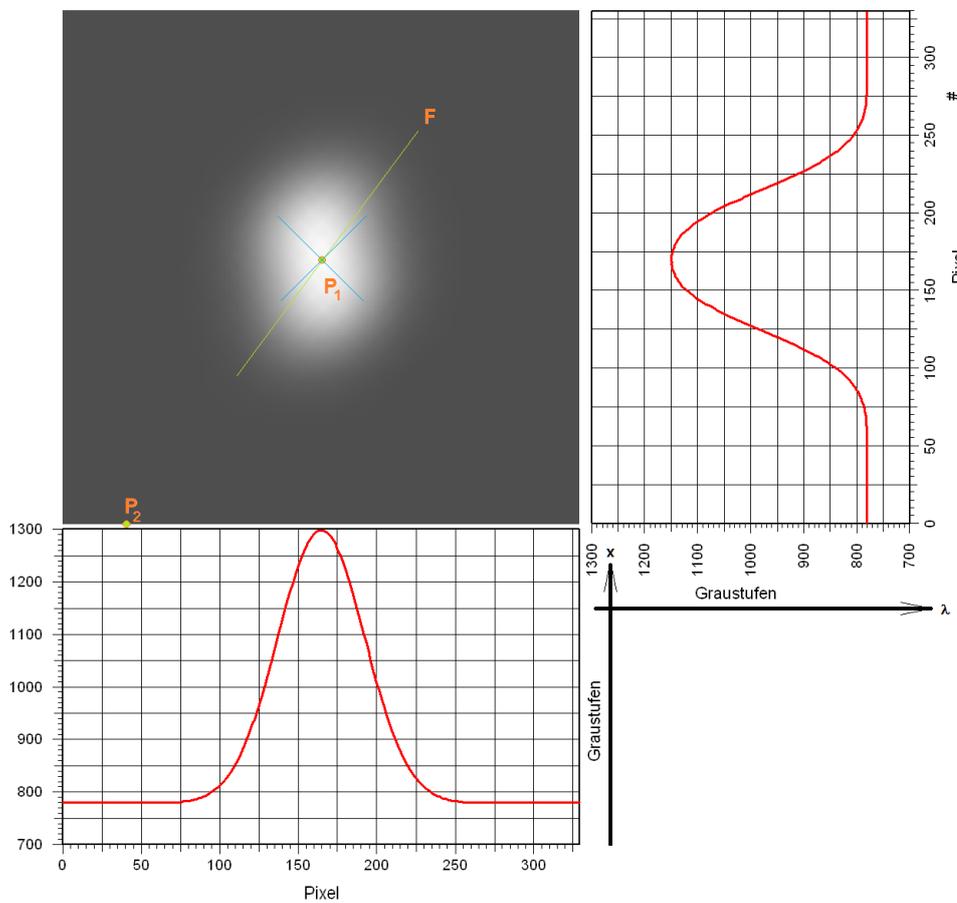
Damit ist die Berechnung von F abgeschlossen.

6.2 Zweidimensionale Verteilung mit beidseitiger Schiefe

$$z = e^{-\frac{1}{4} \cdot \lambda^2 - x^2} + e^{-\frac{1}{4} \cdot (\lambda+1,2)^2 - (x+1,2)^2} \quad \text{mit} \quad \rho_{x\lambda} \rightarrow +1$$



Beispiel 2, Zweidimensionale Normalverteilung mit beidseitiger Schiefe.



Beispiel 2, Ausgewertet.

Ermittelte Werte:

$$\begin{aligned} \mu_x &= 169,4 & \sigma_x &= 44,7 \\ \mu_\lambda &= 164,6 & \sigma_\lambda &= 32,5 \end{aligned}$$

Ermittlung des Funktionals F .

$$x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

\Rightarrow

$$x = 1,38 \cdot \lambda - 57$$

Grafische Darstellung von F über zwei Punkte. Sofort bekannt ist P_1 :

$$P_1(\mu_\lambda; \mu_x) = P_1(165; 169)$$

Der Punkt P_2 ist zweckmäßig ermittelbar an der Stelle $x = 0$.

$$x = 1,38 \cdot \lambda - 57$$

\Rightarrow

$$\lambda_{x=0} = 41,4$$

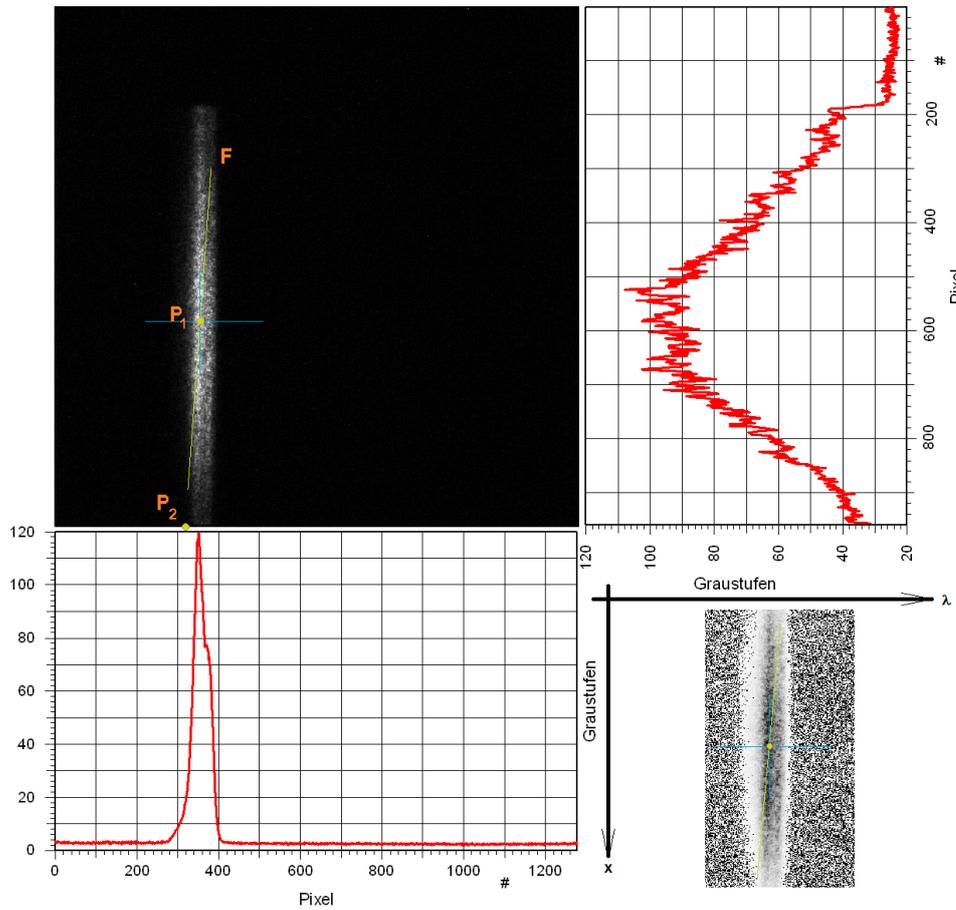
\Rightarrow

$$P_2(\lambda_{x=0}; 0) = P_2(41; 0)$$

Damit ist die Berechnung von F abgeschlossen.

6.3 Originalbild des vorhandenen Spektrografen

Aufgenommen mit dem Spektrografen im Labor 2.40 – SAW2012 am 24. Mai 2013.



Beispiel 3, Ausgewertet.

Ermittelte Werte:

$$\begin{aligned}\mu_x &= 579,8 & \sigma_x &= 231,7 \\ \mu_\lambda &= 355,9 & \sigma_\lambda &= 24,4\end{aligned}$$

Ermittlung des Funktionals F .

$$x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \lambda - \rho_{x\lambda} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_\lambda} \cdot \mu_\lambda + \mu_x$$

⇒

$$x = 9,5 \cdot \lambda - 3024$$

Grafische Darstellung von F über zwei Punkte. Sofort bekannt ist P_1 :

$$P_1(\mu_\lambda; \mu_x) = P_1(356; 580)$$

Der Punkt P_2 ist zweckmäßig ermittelbar an der Stelle $x = 0$.

$$0 = 9,5 \cdot \lambda_{x=0} - 3024$$

⇒

$$\lambda_{x=0} = 318,3$$

⇒

$$P_2(\lambda_{x=0}; 0) = P_2(318; 0)$$

Damit ist die Berechnung von F abgeschlossen.

LaTeX 2 ϵ