Die wohl umständlichste Art, eine Gleichung umzustellen. – Das Resttermverfahren

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt am: 24. Oktober 2014 – Letzte Revision: 6. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Das Resttermverfahren

1.1 Einleitung

[001] Einleitung

Neben der alltäglichen Datensammelarbeit (als Assistent, Techniker, Ingenieur oder Doktorand) kann es vorkommen, selbst Auswerteverfahren zu entwickeln oder zumindestens vorhandene an den eigenen Voraussetzungen anzupassen. Eine nicht zu vermeidende Arbeit ist dabei, mathematische Terme umzustellen. Dieses Handwerk beginnt spätestens im Schulstoff aktuell zu werden während des Mathematikunterrichts und jeder hat schon mehr oder weniger mit Vergnügen so manche Vereinfachung, Erweiterung oder Substitution an Termen vorgenommen. Ein bisschen komplizierter wird es, wenn zwei äquivalente Terme verschiedene Darstellungsformen besitzen, jedoch in ihrem eigenen definierten Raum die gleiche Aussage darstellen. Ein Beispiel: Bei der elliptischen Regression[1] existieren zwei Terme der Form T_1 und T_2.

$$T_1\left(A,B\right)=\frac{B^2\cdot A}{B^2+f^2\cdot e^2}\qquad\qquad T_2\left(\varphi\right)=\left(f^2-e^2\right)^2\cdot\frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}$$

Beide, wie gesagt, sind äquivalent. Während T_1 die A, B- Koeffizientendarstellung und T_2 die goniometrische Darstellung aufzeigt, sind keinerlei Aussageunterschiede vorhanden, so dass gilt:

$$T_1=T_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2\cdot A}{B^2+f^2\cdot e^2}=\left(f^2-e^2\right)^2\cdot\frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}$$

Nun ist das genau genommen nur dann wahr, wenn Nebenbedingungen existieren, die einen Zusammenhang zwischen der A, B- Darstellung und der goniometrischen Darstellung definieren. Zum Beispiel und unter anderen:

$$A=\frac{e^2\cdot a^2+f^2}{1+a^2}\qquad\qquad B=a\cdot\frac{f^2-e^2}{1+a^2}$$

Und:

$$\frac{a^2}{1+a^2}=\sin^2\varphi\qquad\qquad\frac{1}{1+a^2}=\cos^2\varphi$$

Nun kann $T_1\left(A,B\right)$ in $T_1\left(a\right)$ überführt werden und weiterhin in $T_1\left(\varphi\right)$. Jetzt ist ein Vergleich mit $T_2\left(\varphi\right)$ möglich und die Behauptung, dass $T_1=T_2$ ist, kann be- oder entstetigt werden.

Ein jeder kann sich nun an obiges Einführungsbeispiel heran machen und zeigen, dass wirklich $T_1 = T_2$ gilt. Diese Aussage, so viel kann verraten werden, ist wirklich wahr und beide Terme sind äquivalent. Beim Substituieren wird man schnell jedoch feststellen, dass sich die ganze Angelegenheit stark aufbläht und alsbald ein Querformat des Blattes verlangt. Die Tücke steckt doch im Detail. Viel schlimmer ist es jedoch, dass solche Formelwolken am Ende ein hohes Potential an sich einschleichenden Fehlern enthält. Schnell landet man in mathematischen Sackgassen oder viel frustrierender, am Ende erhält man nach (stunden)langer Umstellarbeit wieder den Ausgangsterm $T_1\left(A,B\right)$ und nicht $T_1\left(\varphi\right)$. Nun ja, man hat dann zwar bewiesen, dass die Nebenbedingungen konsistent sind, aber so richtig weiter gekommen ist man nicht.

Eine elegante Möglichkeit der Termumstellung muss her. Es gib sie und sie nennt sich das "Resttermverfahren" ab hier kurz RTV genannt. Dieses Verfahren soll pragmatisch an obigen Beispiel aufgezeigt werden.

[1] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“ http://www.Zenithpoint.de

1.2 Durchführung

Es soll gezeigt werden, dass gilt:[2]

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Mit den zwei Nebenbedingungen

Durchführung

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

kann der linke Term $T_1(A, B)$ in $T_1(a)$ überführt werden.

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \frac{a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot e^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot f^2}{(1 + a^2) \cdot a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + (1 + a^2) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2}$$

Im Zähler des Terms $T_1(a)$ steht nun der Ausdruck $\left(f^2 - e^2\right)$, dieser ist Teil des Terms $T_2(\varphi)$ und wird daher separiert.

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{a^2 \cdot e^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot f^2}{(1 + a^2) \cdot a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + (1 + a^2) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2}$$

Im Zähler des Terms $T_2(\varphi)$ steht weiterhin der Ausdruck $\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi$. Dafür ist „zufällig“ eine Nebenbedingung bekannt.

$$\frac{a^2}{1 + a^2} = \sin^2 \varphi \qquad \frac{1}{1 + a^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a^2}{\left(1 + a^2\right)^2} = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi$$

Im weiteren Verlauf wird der oben teilumgestellte Ausdruck erweitert, nämlich mit dem, was wir erwarten und stellen um.

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \\ \frac{a^2 \cdot e^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot f^2}{(1+a^2) \cdot a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + (1+a^2) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot (1+a^2)^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \\ \frac{a^2 \cdot e^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot f^2}{(1+a^2) \cdot a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + (1+a^2) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot (1+a^2)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi} \end{array} \right.$$

Für $1/\left(\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi\right)$ wird jetzt die Nebenbedingung eingesetzt.

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \\ \frac{a^2 \cdot e^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot f^2}{(1+a^2) \cdot a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + (1+a^2) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot (1+a^2)^2} \cdot \frac{\left(1+a^2\right)^2}{a^2} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2}$$

[2] Quadratischer x- Abstand der Punktdefinition „Wahrer Zenit“ zum Mittelpunkt in der Elliptischen Regression. $(x_{WZ} - x_{MP})^2 = \frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}$

Die ganze Sache sieht schon mal recht vertrauenswürdig aus, fehlt in Term $T_1\,(a)$ nur noch der Nenner von $T_2\,(\varphi)$. Zum Glück für uns steht eine Nebenbedingung zur Verfügung.

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} = f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Mit:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)^2}{(1 + a^2) \cdot (e^2 \cdot a^2 + f^2)} = f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Es wird wieder erweitert, eingesetzt und umgestellt.

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \color{red}{\left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot} \\ \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2} \cdot \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \color{red}{\left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot} \\ \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2} \cdot \left(f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi\right) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left\{ \begin{array}{c} \color{red}{\left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot} \\ \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2} \cdot \frac{a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)^2}{(1 + a^2) \cdot (e^2 \cdot a^2 + f^2)} \end{array} \right.$$

Betrachtet man letzteren komplexen Ausdruck, dann wird man erkennen, dass links vom Gleichheitszeichen der Term $T_1\,(A, B)$ steht und rechts davon der Term $T_2\,(\varphi)$.

$$T_1 = \color{red}{T_2} \cdot \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2} \cdot \frac{a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)^2}{(1 + a^2) \cdot (e^2 \cdot a^2 + f^2)}$$

Da nachgewiesen werden soll, dass $T_1 = T_2$ gilt, muss letztendlich jetzt nur noch gezeigt werden, dass für den „störenden“ Restterm R gilt:

$$T_1 = \color{red}{T_2} \cdot R$$

$\Rightarrow$

$$R = 1$$

Im vorliegenden Beispiel ist das offensichtlich.

$$R = \frac{\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(1 + a^2\right)}{a^2 \cdot (f^2 - e^2)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot (1 + a^2)^2} \cdot \frac{a^2 \cdot \left(f^2 - e^2\right)^2 + f^2 \cdot e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)^2}{(1 + a^2) \cdot (e^2 \cdot a^2 + f^2)} \stackrel{?}{=} 1$$

$\Rightarrow$

$$R = 1 \stackrel{!}{=} 1$$

Das RTV bietet die Möglichkeit, bei $R \neq 1$ aus der Zusammensetzung von R auf mögliche Fehlerorte und Gründe zu schließen. Der Hauptvorteil jedoch ist, dass bei einer Schritt- für- Schritt-Umstellung keine mathematischen Sackgassen und Umwege auftreten. Ebenso sind schwer durchschaubare Zwischenschritte auf dem Weg zur Vereinfachung nicht (mehr so oft) anzutreffen. So ist folgende Gleichung

$$y_1 = \frac{1}{A \cdot (B^2 + f^2 \cdot e^2)} \cdot \left\{ \begin{array}{c} y_{MP} \cdot A \cdot B^2 + y_{MP} \cdot A \cdot f^2 \cdot e^2 + B \cdot \sqrt{A \cdot B^2 \cdot (B^2 + f^2 \cdot e^2)} \\ +f \cdot e \cdot B^2 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} + f^3 \cdot e^3 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} \end{array} \right.$$

gar nicht so einfach umzustellen und zu vereinfachen. Dazu noch die Frage, wann $y_1 = y_{MP}$ gilt, dann ist man doch schon geneigt ein CAS- Programm zu nutzen. Ist jedoch bekannt, dass es einen Restterm geben wird der Form

$$R = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}$$

ist die Welt wieder in Ordnung. Die Auflösung in ausführlichen Schritten, wobei immer $A > 0, B > 0, e > 0, f > 0$ gilt.

$$y_1 = \frac{1}{A \cdot R \cdot A} \cdot \begin{cases} y_{MP} \cdot A \cdot B^2 + y_{MP} \cdot A \cdot f^2 \cdot e^2 + B \cdot \sqrt{A \cdot B^2 \cdot R \cdot A} \\ \quad + f \cdot e \cdot B^2 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}} + f^3 \cdot e^3 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = \begin{cases} \frac{y_{MP} \cdot A \cdot B^2}{A \cdot R \cdot A} + \frac{y_{MP} \cdot A \cdot f^2 \cdot e^2}{A \cdot R \cdot A} + \frac{B \cdot \sqrt{A \cdot B^2 \cdot R \cdot A}}{A \cdot R \cdot A} \\ + \frac{f \cdot e \cdot B^2 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}}}{A \cdot R \cdot A} + \frac{f^3 \cdot e^3 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}}}{A \cdot R \cdot A} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = \frac{y_{MP} \cdot B^2}{R \cdot A} + \frac{y_{MP} \cdot f^2 \cdot e^2}{R \cdot A} + \frac{f^2 \cdot e^2 \cdot B^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{R}}}{A \cdot R \cdot A} + \frac{f^4 \cdot e^4 \cdot \sqrt{\frac{1}{R}}}{A \cdot R \cdot A} + \frac{B^2 \cdot \sqrt{R}}{R \cdot A}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = \left(\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}\right) \cdot y_{MP} + \left(\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot R \cdot A \cdot R}\right) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot \sqrt{R} + \frac{B^2}{R \cdot A} \cdot \sqrt{R}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = \left(\frac{R \cdot A}{R \cdot A}\right) \cdot y_{MP} + \left(\frac{R \cdot A}{A \cdot R \cdot A \cdot R}\right) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot \sqrt{R} + \frac{B^2}{R \cdot A} \cdot \sqrt{R}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_{MP} + \left(\frac{1}{R \cdot A}\right) \cdot f^2 \cdot e^2 \cdot \sqrt{R} + \frac{B^2}{R \cdot A} \cdot \sqrt{R}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_{MP} + \left(\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{R \cdot A}\right) \cdot \sqrt{R}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_{MP} + \left(\frac{R \cdot A}{R \cdot A}\right) \cdot \sqrt{R}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_{MP} + \sqrt{R}$$

Das Ergebnis sieht schon sehr erfreulicher aus, als die gegebene Gleichung. Die Forderung $y_1 = y_{MP}$ ist dann erfüllt, wenn $\sqrt{R} = 0$

$$R = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} = 0$$

$\Rightarrow$

$$B^2 = -f^2 \cdot e^2$$

Da $B^2 > 0$ und $f^2 \cdot e^2 > 0$ gilt, ist gegebener Ausdruck nur dann wahr, wenn $B^2 = 0$ und $f^2 \cdot e^2 = 0$ sind – also gar nicht.

2 Zwei Beispiele

2.1 Beispiel - I

Zwei Beispiele sollen das Prinzip des Resttermverfahrens abrunden und beenden. Diesmal ist gegeben der Ausdruck.[3]

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$$

Beispiel - I

Wobei am Anfang definiert wird:

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$$

Mit:

$$A=\frac{e^2\cdot a^2+f^2}{1+a^2}\qquad B=a\cdot\frac{f^2-e^2}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot a\cdot(f^2-e^2)}$$

Der Nenner enthält f^2-e^2, es fehlt jedoch $\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{1}{f^2-e^2}\cdot\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot a}\cdot\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$$

Mit:

$$\frac{a}{1+a^2}=\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{1}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\cdot\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot(1+a^2)}$$

Der Zähler wird implantiert.

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\frac{1}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot(1+a^2)}\\ \\ \cdot\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}\end{array}\right.$$

Mit:

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}=f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi$$

Mit:

$$A=\frac{e^2\cdot a^2+f^2}{1+a^2}\qquad B=a\cdot\frac{f^2-e^2}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(1+a^2)\cdot(e^2\cdot a^2+f^2)}=f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi$$

Ergibt sich:

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}=\left\{\begin{array}{l}\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\\ \\ \cdot\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot(1+a^2)}\\ \\ \cdot\frac{\left(1+a^2\right)\cdot\left(e^2\cdot a^2+f^2\right)}{a^2\cdot(f^2-e^2)^2+f^2\cdot e^2\cdot(1+a^2)^2}\end{array}\right.$$

Der Restterm R extrahiert.

$$R=\frac{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}{(e^2\cdot a^2+f^2)\cdot(1+a^2)}\cdot\frac{(1+a^2)\cdot(e^2\cdot a^2+f^2)}{a^2\cdot\left(f^2-e^2\right)^2+f^2\cdot e^2\cdot\left(1+a^2\right)^2}\stackrel{?}{=}1$$

[3] Anstieg der Extremaachse - Elliptische Regression.

$\Rightarrow$

$$R = 1 \stackrel{!}{=} 1$$

Damit ist der Ausdruck

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}$$

wahr.

2.2 Beispiel - II

Beispiel - II

Gegeben ist ein kartesisches Koordinatensystem. Betrachtet wird der 1. und 4. Quadrant. Für diesen Quadranten existiert ein spezielles Integral der Form

$$I = \int_{0}^{\infty} x \cdot y \cdot dt$$

Gleichzeitig existieren Datenpaare $P_i\left(x, y\right)$ die regressiert durch die Funktion

$$y = -\ln\left(-\ln x\right)$$

repräsentiert werden. Mit Hilfe der Regressionsfunktion ist das Integral lösbar. Dazu müssen die Nebenbedingungen ermittelt werden. Für y ist folgender Ausdruck wahr.

$$y = y \cdot R$$

Wobei R der Restterm ist und die Nebenbedingung

$$y = -\ln t$$

die Ausgangsgleichung erweitert zu:

$$y = -R \cdot \ln t$$

Eine zweite Nebenbedingung

$$t = -\ln x$$

ergibt die erwartete Regressionsgerade

$$y = -R \cdot \ln\left(-\ln x\right)$$

sobald $R = 1$ gilt. Dazu später mehr. Zuerst sind jedoch x und y definiert durch die ermittelten Nebenbedingungen.

$$y = -\ln t \qquad x = e^{-t}$$

Damit ist das Integral berechenbar.

$$I_1 = -\int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot \ln t \cdot dt$$

$\Rightarrow$

$$I_1 = \gamma$$

Wobei γ die Euler- Mascheroni- Konstante darstellt.

Zurück zum Restterm R. Für γ ist wie gezeigt $R = 1$. Dann kann auch definiert werden aus den Nebenbedingungen:

$$y = -\ln t \qquad x = e^{-t}$$

$\Rightarrow$

$$t = e^{-y} \qquad t = -\ln x$$

Für R dann:

$$R = 1 = \frac{t}{t} = -\frac{\ln x}{e^{-y}}$$

$\Rightarrow$

$$e^{-y} = -\ln x$$

Was aber ist, wenn $R \neq 1$ ist?

$$R = -\frac{\ln x}{e^{-y}}$$

$\Rightarrow$

$$t = R \cdot e^{-y} \qquad t = -\ln x$$

⇒

$$y = -\ln \tfrac{t}{R} \qquad x = e^{-t}$$

Das Integral nun:

$$I_2 = -\int_0^\infty e^{-t} \cdot \ln \frac{t}{R} \cdot dt$$

⇒

$$I_2 = \gamma + \ln R$$

Ein Fehlerwert F wird definiert.

$$F = I_2 - I_1$$

⇒

$$F = \ln R$$

Das RTV eignet sich somit nicht nur zum effektiven Umstellen von Termen, sondern auch, um zum Beispiel Konstanten zu ermitteln.

Ein Zahlenbeispiel.

i	x_i	y_i	$-\ln x_i$	e^{-y_i}	$R_i = -\frac{\ln x_i}{e^{-y_i}}$	$R_i - 1$	$\|R_i - 1\|$	$(R_i - 1)^2$
1	0, 11	- 0, 85	2, 21	2, 34	0, 94	-0, 06	0, 06	0, 004
2	0, 19	- 0, 46	1, 66	1, 58	1, 05	+0, 05	0, 05	0, 003
3	0, 30	- 0, 18	1, 20	1, 20	1, 00	+0, 00	0, 00	0, 000
4	0, 41	+ 0, 09	0, 89	0, 91	0, 98	-0, 02	0, 02	0, 000
5	0, 49	+ 0, 37	0, 71	0, 69	1, 03	+0, 03	0, 03	0, 001
6	0, 61	+ 0, 66	0, 49	0, 52	0, 94	-0, 06	0, 06	0, 004
7	0, 70	+ 1, 04	0, 36	0, 35	1, 03	+0, 03	0, 03	0, 001
8	0, 79	+ 1, 50	0, 24	0, 22	1, 09	+0, 09	0, 09	0, 008
9	0, 89	+ 2, 26	0, 12	0, 10	1, 20	+0, 20	0, 20	0, 040
$n = 9$	Σ = 4, 49	Σ = 4, 43	Σ = 7, 88	Σ = 7, 91	Σ = 9, 26	Σ = 0, 26	Σ = 0, 54	Σ = 0, 061

⇒

$$R = \frac{1}{n} \cdot \Sigma R_i = \frac{9,26}{9} = 1,029$$

⇒

$$F = \ln R = \ln 1,029 = 0,028$$

Für die weiteren Werte gilt:[4]

$$ZM^{|1|} \equiv R_{MAX} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma\, |R_i - 1| = \frac{0,54}{9} = 0,06$$

Sowie:

$$ZM^{(1)} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma\,(R_i - 1) = \frac{0,26}{9} = 0,029$$

Und:

$$ZM^{(2)} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma\,(R_i - 1)^2 = \frac{0,061}{9} = 0,007$$

⇒

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \Sigma\,(R_i - 1)^2} = \sqrt{\frac{0,061}{9}} = 0,082$$

[4] siehe zu den einzelnen statistischen Größen http://www.Zenithpoint.de Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Durchführung einer Regression über das Resttermverfahren am Beispiel einer bilogarithmischen Funktion“ Kapitel „Der Restterm als Fehlerwertkontrolle“

Schlussendlich:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot 9 \cdot \frac{0,061}{0,54^2}} = 1,095 \approx 1$$

Für die nun mit Hilfe des Restterms “optimierte” Funktion $f(x) = -R \cdot \ln(-\ln x)$ mit $R = 1$ ergibt sich ein $R = 1,029$, bedeutet für $\tilde{f}(x) = -1,029 \cdot \ln(-\ln x)$. Die Werte nochmals aufgelistet, lässt sich eine Verbesserung des Regressionsergebnisses ablesen.

i	x_i	y_i	x_i	$f(x)$	x_i	$\widetilde{f}(x)$
1	0, 11	-0, 85	0, 11	-0, 79	0, 11	-0, 82
2	0, 19	-0, 46	0, 19	-0, 51	0, 19	-0, 52
3	0, 30	-0, 18	0, 30	-0, 19	0, 30	-0, 19
4	0, 40	+0, 09	0, 40	+0, 09	0, 40	+0, 09
5	0, 49	+0, 37	0, 49	+0, 34	0, 49	+0, 35
6	0, 61	+0, 66	0, 61	+0, 71	0, 61	+0, 72
7	0, 70	+1, 04	0, 70	+1, 03	0, 70	+1, 06
8	0, 79	+1, 50	0, 79	+1, 45	0, 79	+1, 49
9	0, 89	+2, 26	0, 89	+2, 15	0, 89	+2, 21
$n = 9$	Σ = $4,49$	Σ = $4,43$	Σ = $4,49$	Σ = $4,28$	Σ = $4,49$	Σ = $4,39$
	Urliste		$-\ln(-\ln x)$		$-1,029 \cdot \ln(-\ln x)$	

LaTeX