Das Interpolationsfilter
-
Prequel zu den Grund- und Abklinggleichungen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 30. Juni 2020 – Letzte Revision: 3. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

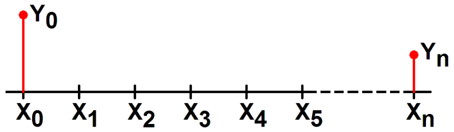
Literatur

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen.

---

1 Herleitung der Interpolationsarbeitsgleichung

Gegeben sind zwei Werte Y_0 und Y_n an den Stützstellen X_0 bzw. X_n. Dazwischen liegen dann $n-1$ äquidistante Stellen dessen dazugehörige Y-Werte unbekannt sind. Herleitung



Diese sollen linear interpoliert werden. Dann gilt:

An der Stelle X_0:

$$Y_0 = Y_0 - 0 \cdot \frac{Y_0 - Y_n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_0 = Y_0$$

An der Stelle X_1:

$$Y_1 = Y_0 - 1 \cdot \frac{Y_0 - Y_n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_1 = \frac{(n-1) \cdot Y_0 + Y_n}{n}$$

An der Stelle X_2:

$$Y_2 = Y_0 - 2 \cdot \frac{Y_0 - Y_n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_2 = \frac{(n-2) \cdot Y_0 + 2 \cdot Y_n}{n}$$

An der Stelle X_n:

$$Y_n = Y_0 - n \cdot \frac{Y_0 - Y_n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_n = Y_n$$

Damit gibt es eine Verallgemeinerung für die Stelle m:

$$Y_m = Y_0 - m \cdot \frac{Y_0 - Y_n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_m = \frac{(n-m) \cdot Y_0 + m \cdot Y_n}{n}$$

Mit:

$$0 \leq m \leq n$$

Ein Spezialfall ist offensichtlich:

$$m = \frac{n}{2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{\frac{n}{2}} = \frac{Y_0 + Y_n}{2} = \varnothing$$

Was den Durchschnitt darstellt.

Oftmals reicht es aus, dass man nur (bequemerweise) die Anzahl der unbelegten Stützstellen l abzählt:

$$l = n - 1 \qquad \rightarrow \qquad n = l + 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_m = \frac{(l+1-m) \cdot Y_0 + m \cdot Y_n}{l+1}$$

Mit:

$$0 \leq m \leq l + 1$$

Mit den Spezialstellen:

$$m = \frac{n}{2} = \frac{l+1}{2}$$

⇒

$$Y_{\frac{l+1}{2}} = \frac{Y_0 + Y_n}{2} = \frac{Y_0 + Y_{l+1}}{2} = \oslash$$

Und:

$$m = 1$$

⇒

$$Y_1 = \frac{l \cdot Y_0 + Y_n}{l+1} = \frac{l \cdot Y_0 + Y_{l+1}}{l+1}$$

2 Übergang zur primären Interpolationsgleichung

2.1 Typ UVI

Gegeben ist:

Übergang

$$Y_m = \frac{(n-m)\cdot Y_0 + m\cdot Y_n}{n}$$

Zwei benachbarte Punkte sollen betrachtet werden.

$$n = 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_m = (1-m)\cdot Y_0 + m\cdot Y_1$$

Die Berechnungsgrundlage soll verschieblich gestaltet werden. Damit ist für den Fall UVI[1] der Wert Y an der Stelle $n-1=0$ interpoliert, damit Y'_{n-1}, an der Stelle $n=1$ originär mit Y_n gegeben und an der Stelle $n=m$ interpoliert mit Y'_n.

Somit gilt:

$$Y'_n = (1-m)\cdot Y'_{n-1} + m\cdot Y_n$$

Es wird final umgestellt[2].

$$Y'_n = \left(Y_n - Y'_{n-1}\right)\cdot m_{UVI} + Y'_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$Y'_n = \left(Y_n - Y'_{n-1}\right)\cdot m + Y'_{n-1} \qquad \textbf{UVI}$$

Im Vergleich zur primären Interpolationsgleichung vom Typ UVI aus [Dip][3]:

$$_{UVI}`y_n = (y_n - `y_{n-1})\cdot(1+x_i) + `y_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{UVI} = 1 + x_i$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq m_{UVI} - 1 = x_i \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq m_{UVI} \leq 2$$

Mit:

$$\begin{array}{rcl} m_{UVI} = 0 & \rightarrow\quad x_i = -1 & \rightarrow\quad Y'_n = Y'_{n-1} \\ m_{UVI} = +1 & \rightarrow\quad x_i = 0 & \rightarrow\quad Y'_n = Y_n \\ m_{UVI} = +2 & \rightarrow\quad x_i = +1 & \rightarrow\quad Y'_n = 2\cdot Y_n - Y'_{n-1} \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$Y'_n = \left(Y_n - Y'_{n-1}\right)\cdot(1+x_i) + Y'_{n-1}$$

[1] zu den Bezeichnungen und Konventionen siehe [Dip] ff.
[2] mit $m = m_{UVI}$, Herleitung folgend
[3] siehe [Dip] Kapitel 2.3.1

2.2 Typ URI

Für URI gilt ein Verschieben des rechten Terms nach rechts und das Beachten, dass damit alle Y-Werte uninterpoliert vorliegen.[4]

Weiterhin gilt:

$$(1 + x_{i;UVI}) + (x_{i;URI} - 1) = 0$$

⇒

$$m_{URI} = x_{i;URI} - 1$$

⇒

$$-1 - m_{URI} = -x_{i;URI}$$

Mit:

$$_{URI}`y_n = (y_{n+1} - y_n) \cdot (-x_i) + y_n$$

⇒

$$Y_n' = (Y_{n+1} - Y_n) \cdot (-1 - m_{URI}) + Y_n$$

⇒

$$Y_n' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n$$

⇒

$$Y_n' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (m - 1) + Y_n \qquad \textbf{URI}$$

Mit:

$$-1 \leq -1 - m_{URI} = -x_i \leq +1$$

⇒

$$-2 \leq m_{URI} \leq 0$$

Mit:

$$\begin{array}{rcccl} m_{URI} = -2 & \rightarrow & x_i = -1 & \rightarrow & Y_n' = Y_{n+1} \\ m_{URI} = -1 & \rightarrow & x_i = 0 & \rightarrow & Y_n' = Y_n \\ m_{URI} = 0 & \rightarrow & x_i = +1 & \rightarrow & Y_n' = 2 \cdot Y_n - Y_{n+1} \end{array}$$

⇒

$$Y_n' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot x_i + Y_n$$

[4] siehe [Dip] Kapitel 2.3.2

2.3 Typ SVI

Für SVI gilt[5]:

$$\begin{aligned} Y_n' &= \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}'' && \textbf{UVI} \\ Y_n'' &= \left(Y_n' - Y_{n+1}\right) \cdot \left(1 + m_{URI}\right) + Y_n' && \textbf{URI} \end{aligned}$$

Mit:

$$2 + m_{URI} = m_{UVI}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Y_n' &= \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot \left(2 + m_{URI}\right) + Y_{n-1}'' \\ Y_n'' &= \left(Y_n' - Y_{n+1}\right) \cdot \left(1 + m_{URI}\right) + Y_n' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{URI}^2 + \left(4 \cdot Y_n - 3 \cdot Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot m_{URI} + 4 \cdot Y_n - 2 \cdot Y_{n-1}'' - Y_{n+1} \quad \textbf{SVI}$$

Mit:

$$m_{URI} = x_i - 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot x_i^2 + \left(2 \cdot Y_n - Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot x_i + Y_n$$

Sowie:

$$m_{URI} = m_{UVI} - 2 \quad \rightarrow \quad m_{UVI} = x_i + 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot \left(m_{UVI} - 2\right)^2 + \left(4 \cdot Y_n - 3 \cdot Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot \left(m_{UVI} - 2\right) + 4 \cdot Y_n - 2 \cdot Y_{n-1}'' - Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{UVI}^2 + \left(Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n+1} \qquad \textbf{SVI}$$

Für die Festlegung:

$$2 + m_{URI} = m_{UVI} = m$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot m^2 + \left(Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot m + Y_{n+1} \qquad \textbf{SVI}$$

[5] siehe [Dip] Kapitel 2.3.3

2.4 Typ SRI

Für SRI analog[6]:

$$\begin{aligned} Y_n' &= (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n && \textbf{URI} \\ Y_n'' &= \left(Y_n' - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}'' && \textbf{UVI} \end{aligned}$$

Mit:

$$2 + m_{URI} = m_{UVI}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Y_n' &= (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n \\ Y_n'' &= \left(Y_n' - Y_{n-1}''\right) \cdot (2 + m_{URI}) + Y_{n-1}'' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m_{URI}^2 + \left(4 \cdot Y_n - 3 \cdot Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{URI} + 4 \cdot Y_n - 2 \cdot Y_{n+1} - Y_{n-1}'' \textbf{SRI}$$

Mit:

$$m_{URI} = x_i - 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot x_i^2 + \left(2 \cdot Y_n - Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot x_i + Y_n$$

Sowie:

$$m_{URI} = m_{UVI} - 2 \quad \rightarrow \quad m_{UVI} = x_i + 1$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (m_{UVI} - 2)^2 + \left(4 \cdot Y_n - 3 \cdot Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot (m_{UVI} - 2) + 4 \cdot Y_n - 2 \cdot Y_{n+1} - Y_{n-1}''$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI}^2 + \left(Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}'' \qquad \textbf{SRI}$$

Für die Festlegung:

$$2 + m_{URI} = m_{UVI} = m$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m^2 + \left(Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot m + Y_{n-1}'' \qquad \textbf{SRI}$$

[6] siehe [Dip] Kapitel 2.3.4

3 „Filter aus!“- Werte für m und x_i

7

„Filter aus!“- Werte sind Werte, wo kein Wert interpoliert vorliegt und der Wert Y_n ein Y- Wert annimmt, der in der Berechnungsgrundlage vorkommt. Also maximal: Filter-aus-Werte

$$Y_n = Y_{n-1} \qquad Y_n = Y_n \qquad Y_n = Y_{n+1}$$

Mit der Nebenbedingung:

$$m_{UVI} - m_{URI} = 2$$

[7] siehe [Dip] Kapitel 3.4 ff.

3.1 Typ UVI

Für UVI gilt:

$$Y_n = (Y_n - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;UVI} = 1 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;i} = m_{1;UVI} - 1 = 0$$

Oder:

$$Y_{n-1} = (Y_n - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{2;UVI} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{2;i} = m_{2;UVI} - 1 = -1$$

Für Y_{n+1} gibt es keine von Y_n und Y_{n-1} unabhängige Lösung.[8]

[8] siehe [Dip] Kapitel 2.4.1

3.2 Typ URI

Bei URI analog:

$$Y_n = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;URI} = -1 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;i} = m_{1;URI} + 1 = 0$$

Oder:

$$Y_{n+1} = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n$$

$\Rightarrow$

$$m_2 = -2 \qquad \rightarrow \qquad x_{2;i} = m_{2;URI} + 1 = -1$$

Für Y_{n-1} gibt es keine von Y_n und Y_{n+1} unabhängige Lösung.[9]

[9] siehe [Dip] Kapitel 2.4.1

3.3 Typ SVI

Bei SVI:

$$Y_n = (Y_n - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI}^2 + (Y_{n-1} - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;UVI} = 1 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;i} = m_{1;UVI} - 1 = 0$$

Oder:

$$Y_{n+1} = (Y_n - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI}^2 + (Y_{n-1} - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{2;UVI} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{2;i} = m_{2;UVI} - 1 = -1$$

Für Y_{n-1} gibt es keine von Y_n und Y_{n+1} unabhängige Lösung.[10]

[10] siehe [Dip] Kapitel 2.4.1

3.4 Typ SRI

Letztendlich für SRI:

$$Y_n = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI}^2 + (Y_{n+1} - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;URI} = -1 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;i} = m_{1;URI} + 1 = 0$$

Oder:

$$Y_{n-1} = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI}^2 + (Y_{n+1} - Y_{n-1}) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$m_{2;UVI} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{2;i} = m_{2;UVI} - 1 = -1$$

Für Y_{n+1} gibt es keine von Y_n und Y_{n-1} unabhängige Lösung.[11]

[11] siehe [Dip] Kapitel 2.4.1

4 Intervallgrenzen für m und x_i aus den Abklinggleichungen

[12]

Abklinggleichung

Das Ermitteln der Abklinggleichungen entspricht der Impulsantwort eines Filters.

[12] siehe [Dip] Kapitel 3.4 ff.

4.1 Typ UVI

Für UVI gilt $Y_n = 0$:

$$Y_n' = \left(Y_n - Y_{n-1}'\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}'$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq \frac{Y_n'}{Y_{n-1}'} = 1 - m_{UVI} \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$-1 = 1 - m_{1;UVI} \qquad 1 - m_{2;UVI} = 1$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;UVI} = 2 \qquad m_{2;UVI} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;i} = +1 \qquad x_{2;i} = -1$$

4.2 Typ URI

Für URI gilt $Y_n = 0$:

$$Y'_n = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (1 + m_{URI}) + Y_n$$

⇒

$$-1 \leq \frac{Y'_n}{Y_{n+1}} = -1 - m_{URI} \leq +1$$

⇒

$$-1 = -1 - m_{1;URI} \qquad -1 - m_{2;URI} = 1$$

⇒

$$m_{1;URI} = 0 \qquad m_{2;URI} = -2$$

⇒

$$x_{1;i} = +1 \qquad x_{2;i} = -1$$

4.3 Typ SVI

Für SVI gilt $Y_n = 0$ und $Y_{n+1} = 0$:

$$Y''_n = \left(Y_n - Y''_{n-1}\right) \cdot m^2_{UVI} + \left(Y''_{n-1} - Y_{n+1}\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq \frac{Y''_n}{Y''_{n-1}} = -m^2_{UVI} + m_{UVI} \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$-1 = -m^2_{1;2;UVI} + m_{1;2;UVI} \qquad - m^2_{3;4;UVI} + m_{3;4;UVI} = 1$$

$\Rightarrow$

$$m^2_{1;2;UVI} - m_{1;2;UVI} - 1 = 0 \qquad m^2_{3;4;UVI} - m_{3;4;UVI} + 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$m_{1;2;UVI} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \qquad m_{3;4;UVI} = \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \qquad x_{2;i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;i} \approx -1,618 \qquad x_{2;i} \approx +0,618$$

4.4 Typ SRI

Für SRI gilt $Y_n = 0$ und $Y_{n+1} = 0$:

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m_{UVI}^2 + \left(Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot m_{UVI} + Y_{n-1}''$$

⇒

$$-1 \leq \frac{Y_n''}{Y_{n-1}''} = 1 - m_{UVI} \leq +1$$

⇒

$$-1 = 1 - m_{1;UVI} \qquad 1 - m_{2;UVI} = 1$$

⇒

$$m_{1;UVI} = 2 \qquad m_{2;UVI} = 0$$

⇒

$$x_{1;i} = 1 \qquad x_{2;i} = -1$$

5 Zusammenfassung

Mit der Festlegung: Zusammenfassung

$$2 + m_{URI} = m_{UVI} = m$$

5.1 Typ UVI

Für den Fall UVI:

Intervallgrenzen:

$$0 \leq m \leq 2$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq x_i \leq 1$$

„Filter aus!“-Wert:

$$m^! = 1$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = 0$$

Oder:

$$m^! = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = -1$$

Letzerer Wert entfällt aus den Restriktionen der Intervallgrenzen.

Die Arbeitsgleichung:

$$Y_n' = \left(Y_n - Y_{n-1}'\right) \cdot m + Y_{n-1}'$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = \left(Y_n - Y_{n-1}'\right) \cdot (1 + x_i) + Y_{n-1}'$$

Die Abklinggleichung:

$$Y_n = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = Y_{n-1}' \cdot (1 - m)$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = Y_{n-1}' \cdot (-x_i)$$

5.2 Typ URI

Für den Fall URI:

Intervallgrenzen:

$$0 \leq m \leq 2$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq x_i \leq 1$$

„Filter aus!"-Wert:

$$m \overset{!}{=} 1$$

$\Rightarrow$

$$x_i \overset{!}{=} 0$$

Oder:

$$m \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$

$$x_i \overset{!}{=} -1$$

Letzerer Wert entfällt aus den Restriktionen der Intervallgrenzen.

Die Arbeitsgleichung:

$$Y_n' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot (m - 1) + Y_n$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot x_i + Y_n$$

Die Abklinggleichung:

$$Y_n = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = Y_{n+1} \cdot (1 - m)$$

$\Rightarrow$

$$Y_n' = Y_{n+1} \cdot (-x_i)$$

5.3 Typ SVI

Für den Fall SVI:

Intervallgrenzen:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \leq m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \leq x_i \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

„Filter aus!"-Wert:

$$m^! = 1$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = 0$$

Oder:

$$m^! = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = -1$$

Die Arbeitsgleichung:

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot m^2 + \left(Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot m + Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = \left(Y_n - Y_{n-1}''\right) \cdot x_i^2 + \left(2 \cdot Y_n - Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot x_i + Y_n$$

Die Abklinggleichung:

$$Y_n = 0 \qquad \text{und} \qquad Y_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = Y_{n-1}'' \cdot (1 - m) \cdot m$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = Y_{n-1}'' \cdot (1 + x_i) \cdot (-x_i)$$

5.4 Typ SRI

Für den Fall SRI:

Intervallgrenzen:

$$0 \leq m \leq 2$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq x_i \leq 1$$

„Filter aus!"-Wert:

$$m^! = -1$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = 0$$

Oder:

$$m^! = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_i^! = -1$$

Letzerer Wert entfällt aus den Restriktionen der Intervallgrenzen.

Die Arbeitsgleichung:

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot m^2 + \left(Y_{n+1} - Y_{n-1}''\right) \cdot m + Y_{n-1}''$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = (Y_n - Y_{n+1}) \cdot x_i^2 + \left(2 \cdot Y_n - Y_{n-1}'' - Y_{n+1}\right) \cdot x_i + Y_n$$

Die Abklinggleichung:

$$Y_n = 0 \qquad \text{und} \qquad Y_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = Y_{n-1}'' \cdot (1 - m)$$

$\Rightarrow$

$$Y_n'' = Y_{n-1}'' \cdot (-x_i)$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$