Was ist NORMAL

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Letzte Revision: 14. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

„Was ist schon Normal?“ oder „Was sagt ein Mittelwert aus?“

1 Einleitende Worte

[001]

Einleitung

Was ist normal? Der Mittelwert einer Reihe von Ereignissen? Ein kurzes „Nein!“ genügt, denn ein Mittelwert zum betrachtendem Zeitpunkt ist konstant und eine Konstante beinhaltet keine Information. Was ist dann normal? Vielleicht der Trend einer Messwertreihe, ob diese sich an den punktuell bekannten Mittelwert annähert oder entfernt. Auch das bringt keine Aussage, ob etwas normal oder nicht normal ist. Denn ist man sich überhaupt sicher, dass der Mittelwert auch wirklich **der** Mittelwert ist? Wenn man den Mittelwert aus einer Messwertreihe bildet, ist das überhaupt zulässig? Korrelieren die Daten miteinander oder nicht. Wenn man die Temperatur eines ersten Märzes über Jahre hinweg messe, ergibt das dann die Durchschnittstemperatur dieses Tages? Weiß das Wetter, heute ist der erste März und ich habe mich X˚C warm oder kalt zu verhalten? Wie ist eigentlich der Trend, wird es im Laufe des Monats (normalerweise) immer wärmer? Wenn ich behaupte, der Trend für Januar ist, dass es im Laufe des Monats immer kälter wird, wo ist dann das Minimum, die Umkehr zur Trendaussage für den Monat März und vor allem, wer bringt das dem Wetter bei, zum Beispiel am 15. Februar am kältesten zu sein. Wie interpoliere ich dann den Trend. Linear geht nicht, quadratisch oder kubisch dann?

Ein Normal gibt es nicht. Wenn dann nur ein Optimum für den Zeitpunkt der Beobachtung und das im Rahmen der Randbedingungen, welche gerade herrschen. Morgen kann es ganz anders aussehen und den Trend dahin, den kann keiner voraussagen, denn der neue Mittelwert dazu hüllt sich in Schweigen.

Warum das so ist, das Übel hat einen Namen, das Mittelwertparadoxon.

2 Erläuterung des Begriffs - Mittelwertparadoxon

Begriffs-
bestimmung

Das Mittelwertparadoxon besagt, dass es unmöglich wäre, den wahren Mittelwert μ einer Verteilung zu ermitteln, statt dessen nur eine Näherung $\bar{x}$ berechenbar sei und der Trend einer Messwertfolge nicht aussagt, ob sich diese dem Mittelwert μ annähert oder entfernt.

3 Grundlagen

Grundlagen

I) Gegeben ist die Berechnungsgrundlage des wahren Mittelwertes μ einer Verteilung:

$$\mu = \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = \frac{1}{Z} \cdot \sum_{i=1}^{Z\to\infty} x_i$$

II) Dem gegenüber steht der berechenbare Mittelwert $\bar{x}$ einer Verteilung:

$$\bar{x}^{(1\cdots N)} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

III) Definiert wird die Differenz aller Messwerte $\Delta\bar{x}$ vom betreffenden Mittelwert:

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = \sum_{i=1}^{Z\to\infty} \left(\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_i\right)$$

IV) Sowie:

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots N)} = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{x}^{(1\cdots N)} - x_i\right)$$

4 Anfängliche Betrachtungen

4.1 Vermutung 1

Vermutet wird für $\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$ folgende Aussage: Vermutungen

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\left(\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_i\right) = 0$$

Die Summe des linken Terms lässt sich umstellen und vereinfachen.

$$\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i = 0$$

$\Rightarrow$

$$Z\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = \sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = \frac{1}{Z}\cdot\sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i$$

Da dass der Definition aus I) entspricht, ist somit festgelegt:

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = 0$$

4.2 Vermutung 2

Folglich ist daraus ableitbar, dass gelten wird:

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots N)} \neq 0$$

Es wird die Summe korrekt manipuliert und umgestellt:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}^{(1\cdots N)} - x_i\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}^{(1\cdots N)} - x_i\right) + \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_Z \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_Z$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\left(\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_i\right) \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_Z$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_Z$$

$\Rightarrow$

$$Z\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_Z$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \frac{1}{Z}\cdot\sum_{i=1}^{Z\to\infty}x_i \neq \frac{1}{Z}\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \frac{1}{Z}\cdot x_Z$$

Der Wert für den linken Term ist aus I) bekannt:

$$0 \neq \bar{x}^{(1 \cdots Z \to \infty)} - x_Z$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(1 \cdots Z \to \infty)} \neq x_Z$$

Da diese Bedingung für ein $Z \to \infty$ schwach, aber hinreichend erfüllt ist, ist somit festgelegt:

$$\Delta \bar{x}^{(1 \cdots N)} \neq 0$$

5 Nachweis des Mittelwertparadoxon

5.1 Mittelwertproblem

Nachgewiesen soll werden:

$$\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

Durchgeführt kann der Beweis mit den Festlegungen $\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = 0$ und $\Delta\bar{x}^{(1\cdots N)} \neq 0$. Denn daraus lässt sich die Beziehung ableiten: Beweisführung

$$\Delta\bar{x}^{(1\cdots N)} \neq \Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

Der linke Term wird substituiert und umgestellt:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}^{(1\cdots N)} - x_i\right) \neq \Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^{(1\cdots N)} - \sum_{i=1}^{N} x_i \neq \Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

$\Rightarrow$

$$N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)} - \sum_{i=1}^{N} x_i \neq \Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(1\cdots N)} - \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i \neq \frac{1}{N}\cdot\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

Der Wert für den linken Term ist aus 2) bekannt:

$$0 \neq \frac{1}{N}\cdot\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

Das Einsetzen von $\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} = 0$ bedingt eine inkorrekte Lösung, daher wird durch Substitution $\Delta\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$ aufgelöst und umgestellt:

$$0 \neq \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\left(\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - x_i\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 \neq \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{Z\to\infty}\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{Z\to\infty} x_i$$

Linke Summe kann ersetzt werden durch eine bekannte Berechnungsgrundlage, die rechte sinnvoll gesplittet:

$$0 \neq \frac{Z}{N}\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=N+1}^{Z\to\infty} x_i\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 \neq \frac{Z}{N}\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=N+1}^{Z\to\infty} x_i$$

$\Rightarrow$

$$0 \neq \frac{Z}{N}\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \bar{x}^{(1\cdots N)} - \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=N+1}^{Z\to\infty} x_i$$

Die Störsumme wird auf die linke Seite isoliert. Minimalistisch betrachtet, muss diese mindestens einen Wert beinhalten - x_Z:

$$\sum_{i=N+1}^{Z\to\infty} x_i \neq Z\cdot\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - N\cdot\bar{x}^{(1\cdots N)}$$

⇒

$$x_Z \neq Z \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

Aus obigen Betrachtungen ist ableitbar (Vermutung 2), dass die Störsumme gleich x_Z dadurch eliminiert werden kann, wenn x_Z durch den wahren Mittelwert $\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$ ersetzt wird:

$$\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq Z \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

⇒

$$Z \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} - \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

⇒

$$(Z-1) \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

Die minimalistische Annahme des Störterms zu x_Z führte dazu, dass ein Zusammenhang zwischen Z und N unbemerkt mitdefiniert wurde:

$$Z - 1 = N$$

⇒

$$N \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

⇒

$$\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)} \neq \bar{x}^{(1\cdots N)}$$

Was nichts anderes besagt, als das Mittelwertparadoxon.

5.2 Trendproblem

Die Frage nach dem Trend lässt sich leicht ableiten aus dem nun bewiesenen Zusammenhang:

$$\bar{x}^{(1\cdots N)} \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

Der linke Term wird durch eine Summe ersetzt:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \neq \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

⇒

$$x_1 + x_2 + \ldots x_N \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

Da der rechte Term in seinem quantitativen Wert unbekannt ist, kann der linke Term ebenfalls keine Aussage hinsichtlich eines Trends gestatten und $x_1 + x_2 + \ldots x_N$ ist nichts weiter als der Trend einer Messwertfolge. Da die Unbekanntheit des rechten Terms sich auf alle Umstände erstreckt, kann auch keine Aussage über „gleich“ oder „ungleich“, „größer als“ oder „kleiner als“ der beiden Terme durchgeführt werden.

6 Ein kleines Beispiel

Vom 1. bis zum 10. März wird durch einen Schüler für das Schulprojekt „Wetterbeobachtung“ die Tages(höchst)temperatur um 1300 Uhr gemessen. Beispiel

Am Ende der Messstrecke erhält der Schüler folgende Tabelle. Die erste Spalte dient dem Schüler

Tag der Messung	Temperatur in ˚C	Temperatur in ˚C
Mittwoch, den 10. März	3	3
Dienstag, den 09. März	5	5
Montag, den 08. März	8	8
Sonntag, den 07. März	6	-
Sonnabend, den 06. März	2	-
Freitag, den 05. März	1	-
Donnerstag, den 04. März	9	-
Mittwoch, den 03. März	4	-
Dienstag, den 02. März	7	-
Montag, den 01. März	3	-

dazu, die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Märztage zu ermitteln.

$$\bar{x}^{(1\cdots10)} = \frac{3+7+4+9+1+2+6+8+5+3}{10}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(1\cdots10)} = \frac{48}{10} = 4,8°C$$

Die zweite Spalte dient dem Schüler dazu, den Trend der Temperatur für einen Monat März zu ermitteln.

$$\bar{x}^{(8\cdots10)} = \frac{8+5+3}{10}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}^{(8\cdots10)} = \frac{16}{3} = 5,3°C$$

Der Trend in den Augen des Schülers würde bei Betrachtung beider Durchschnittstemperaturen lauten: „Im Laufe des Monat März steigen die Tages(höchst)temperaturen an!“

Betrachtet man jedoch die Einzelwerte explizit, dann ist zu erkennen, es wird immer kälter! Der letzte Tag ist kälter als an 4 Tagen der Vorwoche.

Gründe:

Der Durchschnitt der ersten Woche wird als Referenz genommen, obwohl klar ist, dass dieser Durchschnitt nicht der wahre Durchschnitt einer 1. Märzwoche sein kann, da 7 Messwerte nie Repräsentant von μ sein werden (schon deshalb nicht, weil eine physikalische Größe „Temperatur“ nicht weiß, dass sie um 1300 Uhr am höchsten zu sein hat). Auch dann nicht, wenn man mehrere Jahre messen würde. Die Korrelation zwischen den Tages(höchst)temperaturen der 1. Märzwoche verschiedener Jahre ist mehr als fraglich. Der positive Wert selber wohl nur schön anzusehen nach einem kalten Winter.

Der Trend lässt nicht eine Aussage zu, wie oben gezeigt, ob vom Durchschnitt weg oder zu diesen hin sich (hier) die Temperaturen bewegen. Ein Einsetzen verdeutlicht dies:

$$x_1 + x_2 + \ldots x_N \neq N \cdot \bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$$

$\Rightarrow$

$$8+5+3 \neq 3 \cdot 4,8$$

$\Rightarrow$

$$16°C > 14,4°C$$

Da die Summe des linken Terms (die Einzelwerte) größer als der für den Betrachter wahre Mittelwert (ist er aber nicht) $\bar{x}^{(1\cdots Z\to\infty)}$ mal der Anzahl der Messwerte $N = 3$ ist, kommt es hier eben zum Widerspruch zwischen einem mathematisch exakt berechneten Trend $5,3°C > 4,8°C$ und der phänomenologischen Aussage $8 \rightarrow 5 \rightarrow 3$.

Wie sieht das mit dem Trend der ersten Woche aus. Die Durchschnittstemperatur beläuft sich auf:

$$\bar{x}^{(1\cdots7)} = \frac{3+7+4+9+1+2+6}{7}$$

⇒

$$\bar{x}^{(1\cdots7)} = \frac{32}{7} = 4,6°C$$

Da es in der ersten Woche im Durchschnitt kälter als der Mittelwert ist, bestätigt dass den erwarteten Trend, es wird im Laufe des Monat März wärmer. Die explizite Betrachtung der Messwerte sagt jedoch ein Gegenteil voraus.

$$3+7+4+9+1+2+6 \neq 7 \cdot 4,8$$

⇒

$$32°C < 33,6°C$$

7 Abschlussbemerkungen.

Abschließend sei also gesagt, sollten man über einen der verschiedensten Informationskanäle erfahren, dass der Monat März „zu kalt, zu warm, zu feucht, zu trocken“ oder anderes war, dann bedeutet das nicht, dass dieser Monat März außerhalb der Norm stand, auch kann nicht gesagt werden wohin die Reise mit sämtlich folgenden Märzen hingeht. Es bedeutet lediglich, er war „wärmer, kälter, feuchter trockener“ **als uns bekannt**. Nächstes Jahr sieht alles anders aus, aber keiner weiß wie, aber irgendwie wohl doch wieder (für uns Menschen un)normal.

Abschluss