Knicken nach Theorie II. Ordnung

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. Dezember 2012 – Letzte Revision: 4. April 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Herleitung der Arbeitsformel **3**

3 Herleitung der Verzweigungskraft **4**

4 Die Auslenkung infolge Knicken **5**

5 Beispiel **6**

Literatur

[Dip12a] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die Biegelinie und deren Ableitung. Intranet, MBI Berlin, November 2012.

[Dip12b] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung. Intranet, MBI Berlin, November 2012.

---

1 Einleitung

Einleitung

Die Verzweigungskraft bzw. die Knicklast eines Eulerstabes soll hergeleitet werden. In der Literatur wurde der Lösungsweg bereits zahlreich aufgezeigt und bräuchte daher eigentlich nicht mehr beschrieben werden. Im kleinen Unterschied soll das Modell aus [Dip12b] hier genutzt werden.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die hier beschriebenen Berechnungsgrundlagen einem Spezielfall unterworfen sind und daher nicht unkontrolliert als allgemeingültig angesehen werden dürfen.

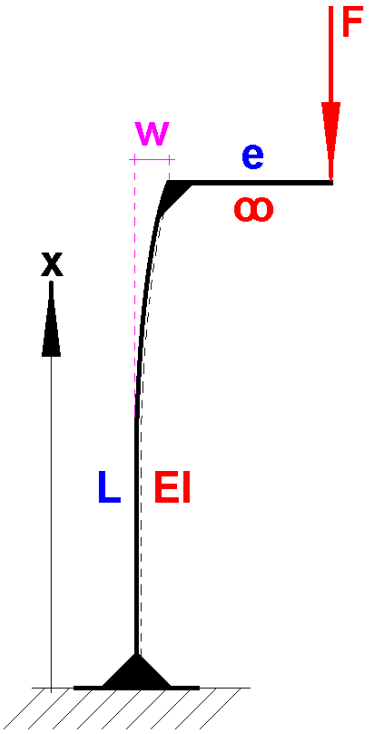

Abbildung 1: Das Modell aus [Dip12b] als Grundlage der weiteren Berechnungen.

2 Herleitung der Arbeitsformel

An einem verformten Stab kann eine Gleichgewichtsbedingung hergestellt werden aus Biegemoment M und einer angreifenden Druckkraft F. Arbeitsformel

$$M(x) = F \cdot w(x)$$

Für das Biegemoment wird aus [Dip12b] die Grundlage Theorie I. Ordnung genutzt – Absatz 3.2.

$${}_{I}M(x) = -E \cdot I \cdot {}_{I}w''(x)$$

Durch das Einsetzten in die Arbeitsformel erhält man eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung und somit die Möglichkeit nach Theorie 2. Ordnung rechnen zu können.

$$-E \cdot I \cdot {}_{I}w''(x) = F \cdot {}_{I}w(x)$$

$\Rightarrow$

$${}_{II}w''(x) + \frac{F}{E \cdot I} \cdot {}_{II}w(x) = 0$$

Die Biegelinie ${}_{II}w(x)$ und die 2. Ableitung der Biegelinie ${}_{II}w''(x)$ sind bekannt aus [Dip12b] - Absatz 4.2

$${}_{II}w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{\chi \cdot \varepsilon} - \tan\left(\frac{e}{\chi \cdot \varepsilon}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1\right)\right)$$

Mit:

$$\chi = \sqrt{\frac{e}{e+w_0}} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

Im Gegensatz zum Modell aus [Dip12b] ist die Außermittigkeit der Kraft F sehr klein, so dass der $\tan$ als rund Null angesehen werden kann. So vereinfacht sich ${}_{II}w(x)$ erstmalig.

$${}_{II}w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - x$$

Die 2. Ableitung dazu.

$${}_{II}w''(x) = -\frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Eingesetzt in die Arbeitsformel ergibt sich damit endgültig:

$$\frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - x\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Wenn $F/E \cdot I = 1/\varepsilon^2$ angesetzt.

$$\frac{x}{\varepsilon} = 0$$

Das impliziert die Annahme, dass das F in ε ein anderes F ist, als in $F/E \cdot I$. Was auch der Fall ist und Grundlage der Ermittlung der Verzweigungskraft F_k.

3 Herleitung der Verzweigungskraft

Verzweigungskraft

Dazu wird die Arbeitsformel nach F umgestellt.

$$F = E \cdot I \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - x}$$

Interessant ist die Verzweigungskraft, welche am Stabende, an der Stelle L angreift. Die Verzweigungskraft ist die Last, welche obigen Ausdruck Null werden lässt (Randbedingung der Differentialgleichung ${}_{II}w\left(L\right)$). Das ist erzwingbar, indem der Zähler des Ausdrucks Null gesetzt wird.

$$\sin\frac{L}{\varepsilon} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{L}{\varepsilon} = n \cdot \pi$$

Mit:

$$n \in N_0$$

Der Nenner, das ε wird resubstituiert.

$$\frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = n^2 \cdot \pi^2$$

$\Rightarrow$

$$F = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I$$

Die erste, praktisch relevante Verzweigungskraft ergibt sich dann mit:

$$F_K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I$$

4 Die Auslenkung infolge Knicken

Um die Knickamplitude abschätzen zu können, wird die erste Knicklast in die nach F umgestellte Arbeitsformel eingesetzt und nach χ umgestellt. Auslenkung

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I = E \cdot I \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - x}$$

$\Rightarrow$

$$\chi = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot L}{(\pi^2 \cdot \varepsilon^2 - L^2) \cdot \sin\frac{L}{\varepsilon}}$$

In χ sind die Imperfektion w_0 enthalten und die Außermittigkeit $\bar{e} >> 0$ jetzt nach dem Ausknicken und somit nicht zu verwechseln mit $e \approx 0$ vor dem Ausknicken.

$$\sqrt{\frac{\bar{e}}{\bar{e} + w_0}} = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot L}{(\pi^2 \cdot \varepsilon^2 - L^2) \cdot \sin\frac{L}{\varepsilon}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{e} = w_0 \cdot \frac{Z^2}{1 - Z^2}$$

Mit:

$$Z = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot L}{(\pi^2 \cdot \varepsilon^2 - L^2) \cdot \sin\frac{L}{\varepsilon}}$$

5 Beispiel

Beispiel

Als qualitatives Beispiel sollen folgende Werte genutzt werden $L = 1$ und $E \cdot I = 0,988$ und $w_0 = -0,015$. Siehe dazu auch [Dip12a]. Die Verzweigungskraft berechnet sich damit zu:

$$F_K = 0,988 \cdot \pi^2 \approx 9,75$$

Die grafische Darstellung folgend.

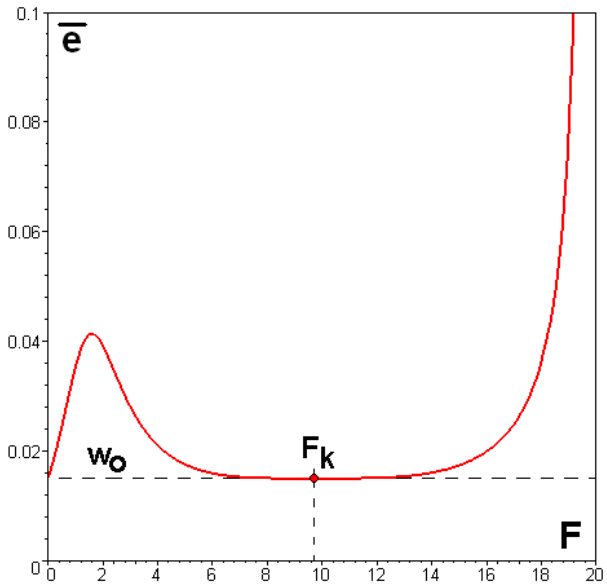

Abbildung 2: Die qualitative grafische Darstellung des Ausknickens nach Erreichen der Verzweigungskraft F_k eines auf Druck beanspruchten Stabes infolge F mit den oben angegebenen Bedingungen.

Das Modell aus [Dip12b] zeigt ein überaus träges Verhalten auf das Überschreiten von F_k.

LaTeX