Kleine Wärmetheorie einer Zweistoffbox

Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 14. August 2020 – Letzte Revision: 16. August 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dip12] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Kleine Wärmetheorie einer Zweistoffbox - Arbeitsblätter zur Masterarbeit, 2012.

1 Die thermische Trägheit der Interferometerbox in Bezug konstruktiven und stofflichen Aufbaus

Das Innere der thermisch stabilisierenden Box besteht aus dem Interferometer. Es wird angenommen, dass dieses Interferometer nur aus zwei verschiedenen Stoffen zusammen gesetzt sei (Zweistoffmodell), beispielsweise Luft und ein zu nutzendes Metall, wie Kupfer. Diese physikalisch existenten Stoffe besitzen folgende hier relevante Eigenschaften: [Dip12]

Interferometervolumen	:	$V = h \cdot b \cdot t$
Stoffdichte Stoff I	:	ρ_{I}
Stoffdichte Stoff II	:	ρ_{II}
Stoffanteil Stoff I	:	$N_{\mathrm{I}} \rightarrow (0 \cdots 1)$
Stoffanteil Stoff II	:	$N_{\mathrm{II}} \rightarrow (1 \cdots 0)$
Spezifische Wärmekapazität Stoff I	:	c_{I}
Spezifische Wärmekapazität Stoff II	:	c_{II}
Wärmestrom nach Außen oder Innen	:	$\dot{Q}$

Für das Zweistoffmodell wird die effektive spezifische Wärmekapazität c ermittelt aus den Wichtungen der Stoffanteile:

$$c = c_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} \cdot N_{\mathrm{II}}$$

$\Rightarrow$

$$c = c_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}})$$

Für das Zweistoffsystem wird die effektive Masse m ermittelt aus den Wichtungen der Stoffanteile:

$$m = \rho_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} \cdot V + \rho_{\mathrm{II}} \cdot N_{\mathrm{II}} \cdot V$$

$\Rightarrow$

$$m = V \cdot (\rho_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + \rho_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}}))$$

Die resultierende Wärmekapazität (Entropie) C des Interferometers kann nun berechnet werden:

$$C = c \cdot m$$

$\Rightarrow$

$$C = V \cdot (c_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}})) \cdot (\rho_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + \rho_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}}))$$

Der Temperaturgradient ∇T zwischen Interferometer und Umwelt wird definiert durch:

$$\nabla T = \frac{\dot{Q}}{C}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla T = \frac{\dot{Q}}{V \cdot (c_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}})) \cdot (\rho_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + \rho_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I})})}$$

Aus dem Temperaturgradienten kann die Erwärmungs- oder Abkühlzeit t, je nach Wärmestromrichtung, berechnet werden:

$$t = \frac{\Delta T}{\nabla T}$$

Wobei ΔT die Differenz zwischen Interferometer und Umwelt darstellt:

$$t = \frac{V \cdot \Delta T}{\dot{Q}} \cdot (c_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}})) \cdot (\rho_{\mathrm{I}} \cdot N_{\mathrm{I}} + \rho_{\mathrm{II}} \cdot (1 - N_{\mathrm{I}}))$$

Da N_I (der Anteil des Stoffes I) quadratisch im obigen Ausdruck vertreten ist, muss ein Extrema für t existieren. Wenn dieses Extrema ein Maximum darstellt, ist das der Punkt, an dem das Interferometer besonders träge reagiert.

Dieses Maximum[1] kann ermittelt werden:

$$\frac{d}{dN_\mathrm{I}}\frac{V\cdot\Delta T}{\dot{Q}}\cdot(c_\mathrm{I}\cdot N_\mathrm{I}+c_\mathrm{II}\cdot(1-N_\mathrm{I}))\cdot(\rho_\mathrm{I}\cdot N_\mathrm{I}+\rho_\mathrm{II}\cdot(1-N_\mathrm{I}))=0$$

$\Rightarrow$

$$N_\mathrm{I,Opt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{II}-c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II}-c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}}{(c_\mathrm{I}-c_\mathrm{II})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})}=1-N_\mathrm{II,Opt}$$

Die dazu gehörige maximale Zeit t_Max:[2]

$$t_\mathrm{Max}=\frac{1}{4}\cdot\frac{V}{\dot{Q}}\cdot\frac{(c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}-c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II})^2}{(c_\mathrm{II}-c_\mathrm{I})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})}$$

Der minimale Temperaturgradient ∇T_Min innerhalb des Interferometer ist aus t_Max berechenbar:

$$\nabla T_\mathrm{Min}=\frac{\Delta T}{t_\mathrm{Max}}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla T_\mathrm{Min}=\frac{4\cdot\dot{Q}}{V}\cdot\frac{(c_\mathrm{II}-c_\mathrm{I})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})}{(c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}-c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II})^2}$$

[1] Ob Maximum oder Minimum beschreibt die zweite Ableitung mit den Fallunterscheidungen:

Maximum:

$$(c_\mathrm{I}-c_\mathrm{II})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})<0$$

Minimum:

$$(c_\mathrm{I}-c_\mathrm{II})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})>0$$

[2] Damit $t_\mathrm{Max}\longrightarrow$ Max geht, muss gelten:

$$V\longrightarrow \text{Max}\qquad \dot{Q}\longrightarrow 0$$

Sowie:

$$\frac{(c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}-c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II})^2}{(c_\mathrm{II}-c_\mathrm{I})\cdot(\rho_\mathrm{I}-\rho_\mathrm{II})}\longrightarrow \text{Max}$$

$\Rightarrow$

$$c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}-c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II}\longrightarrow \pm\text{Max}$$

Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten für eine Maximierung von t_Max.

Fall 1:

$$c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}\longrightarrow \text{Max}\qquad c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II}\longrightarrow 0$$

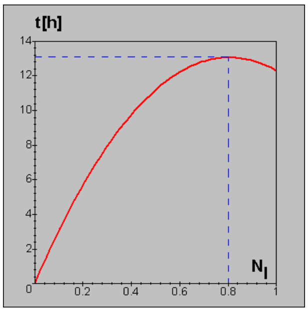
Fall 2:

$$c_\mathrm{I}\cdot\rho_\mathrm{II}\longrightarrow \text{Max}\qquad c_\mathrm{II}\cdot\rho_\mathrm{I}\longrightarrow 0$$

2 Anwendung am konkreten Beispiel

Interferometervolumen	:	$V = 0,0126\text{m}^3$
Stoffdichte Stoff I = Kupfer	:	$\rho_\text{I} = 8920\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Stoffdichte Stoff II = Luft	:	$\rho_\text{II} = 1204\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Spezifische Wärmekapazität Stoff I	:	$c_\text{I} = 381\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
Spezifische Wärmekapazität Stoff II	:	$c_\text{II} = 1005\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
Wärmestrom nach Außen oder Innen	:	$\dot{Q} = 29\frac{\text{J}}{\text{s}}$
Temperaturdifferenz	:	$\Delta T = 30\text{K}$

Folgend die Abhängigkeit der Abkühlungszeit t in h vom Anteil des Kupfers im Interferometer.



Die Abkühl- oder Erwärmungszeit in Abhängigkeit des Kupferanteils zeigt ein deutliches Maximum bei $N_{\text{I;Opt}} = 0,805 \equiv 80,5\%$ an mit $t_{\text{Max}} = 13,1\text{h}$. An diesem Punkt ist das Interferometer wärmedynamisch besonders träge, besitzt mit

$$\nabla T_{\text{Min}} = 0,0006376\frac{\text{K}}{\text{s}} \equiv 0,64\frac{\text{mK}}{\text{s}}$$

den minimalen Temperaturgradienten innerhalb des Interferometers.[3]

$\LaTeX\,2_\varepsilon$

[3]

$$c_\text{I} - c_\text{II} = -624$$
$$\rho_\text{I} - \rho_\text{II} = +7.716$$

$\Rightarrow$

$$(c_\text{I} - c_\text{II}) \cdot (\rho_\text{I} - \rho_\text{II}) < 0$$

Sowie:

$$c_\text{II} \cdot \rho_\text{I} = 8.964.600 \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$
$$c_\text{I} \cdot \rho_\text{II} = 458.742 \quad \rightarrow \quad 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{c_\text{II} \cdot \rho_\text{I}}{c_\text{I} \cdot \rho_\text{II}} = \frac{\text{Max}}{0} = 19,54$$