(Polynom)Interpolation nach Lagrange

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 10. Juli 2014 - Letzte Revision: 5. August 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeindarstellung **2**
1.1 Polynominterpolation n- ten Grades . . . 2
1.2 Septische Interpolation . . . 3
1.3 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation) . . . 4
1.4 Quintische Interpolation . . . 5
1.5 Biquadratische Interpolation . . . 6
1.6 Kubische Interpolation . . . 7
1.7 Quadratische Interpolation . . . 8
1.8 Lineare Interpolation . . . 9

2 Koeffizientendarstellung **10**
2.1 Septische Interpolation . . . 10
2.2 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation) . . . 24
2.3 Quintische Interpolation . . . 31
2.4 Biquadratische Interpolation . . . 35
2.5 Kubische Interpolation . . . 37
2.6 Quadratische Interpolation . . . 38
2.7 Lineare Interpolation . . . 39

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Allgemeindarstellung

1.1 Polynominterpolation n- ten Grades

[001] Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_i\left(\lambda_i; X_i\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange beschrieben.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte beliebiger Anzahl $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$L_i\left(x\right) = \prod_{\substack{k \neq i \\ i = 0 \ldots n}} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.2 Septische Interpolation

Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{7} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 7$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)\cdot(x_0-x_6)\cdot(x_0-x_7)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)\cdot(x_1-x_6)\cdot(x_1-x_7)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)\cdot(x_2-x_6)\cdot(x_2-x_7)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)\cdot(x_3-x_6)\cdot(x_3-x_7)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)\cdot(x_4-x_6)\cdot(x_4-x_7)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)\cdot(x_5-x_6)\cdot(x_5-x_7)}$$

$$L_6 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_7)}{(x_6-x_0)\cdot(x_6-x_1)\cdot(x_6-x_2)\cdot(x_6-x_3)\cdot(x_6-x_4)\cdot(x_6-x_5)\cdot(x_6-x_7)}$$

$$L_7 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_7-x_0)\cdot(x_7-x_1)\cdot(x_7-x_2)\cdot(x_7-x_3)\cdot(x_7-x_4)\cdot(x_7-x_5)\cdot(x_7-x_6)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5 + y_6 \cdot L_6 + y_7 \cdot L_7$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.3 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation)

[001] Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{6} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 6$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)\cdot(x_0-x_6)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)\cdot(x_1-x_6)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)\cdot(x_2-x_6)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)\cdot(x_3-x_6)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)\cdot(x_4-x_6)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_6)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)\cdot(x_5-x_6)}$$

$$L_6 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_6-x_0)\cdot(x_6-x_1)\cdot(x_6-x_2)\cdot(x_6-x_3)\cdot(x_6-x_4)\cdot(x_6-x_5)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5 + y_6 \cdot L_6$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.4 Quintische Interpolation

Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{5} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 5$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.5 Biquadratische Interpolation

Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durch-
[001] geführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{4} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 4$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right) \cdot \left(x - x_4\right)}{\left(x_0 - x_1\right) \cdot \left(x_0 - x_2\right) \cdot \left(x_0 - x_3\right) \cdot \left(x_0 - x_4\right)}$$

$$L_1 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right) \cdot \left(x - x_4\right)}{\left(x_1 - x_0\right) \cdot \left(x_1 - x_2\right) \cdot \left(x_1 - x_3\right) \cdot \left(x_1 - x_4\right)}$$

$$L_2 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_3\right) \cdot \left(x - x_4\right)}{\left(x_2 - x_0\right) \cdot \left(x_2 - x_1\right) \cdot \left(x_2 - x_3\right) \cdot \left(x_2 - x_4\right)}$$

$$L_3 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_4\right)}{\left(x_3 - x_0\right) \cdot \left(x_3 - x_1\right) \cdot \left(x_3 - x_2\right) \cdot \left(x_3 - x_4\right)}$$

$$L_4 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right)}{\left(x_4 - x_0\right) \cdot \left(x_4 - x_1\right) \cdot \left(x_4 - x_2\right) \cdot \left(x_4 - x_3\right)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.6 Kubische Interpolation

Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 3$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right)}{\left(x_0 - x_1\right) \cdot \left(x_0 - x_2\right) \cdot \left(x_0 - x_3\right)}$$

$$L_1 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right)}{\left(x_1 - x_0\right) \cdot \left(x_1 - x_2\right) \cdot \left(x_1 - x_3\right)}$$

$$L_2 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_3\right)}{\left(x_2 - x_0\right) \cdot \left(x_2 - x_1\right) \cdot \left(x_2 - x_3\right)}$$

$$L_3 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right)}{\left(x_3 - x_0\right) \cdot \left(x_3 - x_1\right) \cdot \left(x_3 - x_2\right)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.7 Quadratische Interpolation

[001] Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 2$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right)}{\left(x_0 - x_1\right) \cdot \left(x_0 - x_2\right)}$$

$$L_1 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_2\right)}{\left(x_1 - x_0\right) \cdot \left(x_1 - x_2\right)}$$

$$L_2 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right)}{\left(x_2 - x_0\right) \cdot \left(x_2 - x_1\right)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2$$

Die Interpolation ist damit beendet.

1.8 Lineare Interpolation

Im Rahmen des Projektes SAW- 2012 soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Mit dem Fortschritt des Experiments und der Gewinnung von Daten stellte sich das Verfahren nach Newton als das am besten geeignetste heraus. Im Verlauf dieser Abhandlung wird das Verfahren nach Lagrange genutzt.

Die Interpolation nach Newton ist unter http://www.nadirpoint.de/InterpolationNewton.pdf einsehbar.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{1} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 1$$

$\Rightarrow$

$$L_0\left(x\right) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1\left(x\right) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1$$

Die Interpolation ist damit beendet.

2 Koeffizientendarstellung

In einigen Anwendungsfällen ist es interessant die Koeffizienten explizit zu kennen. Über das Polynom $P(x)$ nach Lagrange ist das zwar möglich, jedoch symbolisch unpraktisch beschrieben.
[001]

2.1 Septische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned}
d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
\cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
\cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
\cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
\cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
\cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
\cdot d_{67}
\end{aligned}$$

ergibt sich das septische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&a_0^{(7)} = \\
&-y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&+y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
&-y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
&+y_3 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
&-y_4 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
&+y_5 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
&-y_6 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67} \\
&+y_7 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1^{(7)} = \\
&+y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&+y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}\\
&-y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\cdot d_{57}\\
&+y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_7\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2^{(7)}=\\
&-y_0\cdot\\
&(\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\cdot d_{07}\\
&+y_1\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\cdot d_{17}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\cdot d_{57}\\
&-y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}\\
&+y_7\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$a_3^{(7)} =$
$+y_0 \cdot$
$($
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07}$
$-y_1 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}$

$$
\begin{aligned}
&+y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}
\end{aligned}
$$

$+y_4 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47}$
$-y_5 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57}$

$$
\begin{aligned}
&+y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}\\
&-y_7\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_4^{(7)} = \\
&-y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&+y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}
\end{aligned}
$$

$+y_5 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57}$
$-y_6 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67}$
$+y_7 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}$

$$
\begin{aligned}
&a_5^{(7)} = \\
&+y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
&+y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
&-y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
&+y_4 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_6+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\cdot d_{57}\\
&+y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_7)\\
&\quad +x_5\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}\\
&-y_7\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_6^{(7)} =\\
&-y_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\cdot d_{07}\\
&+y_1\cdot(x_0+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\cdot d_{17}\\
&-y_2\cdot(x_0+x_1+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&+y_3\cdot(x_0+x_1+x_2+x_4+x_5+x_6+x_7)\cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&-y_4\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_5+x_6+x_7)\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}\\
&+y_5\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7)\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\cdot d_{57}\\
&-y_6\cdot(x_7+x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}\\
&+y_7\cdot(x_0+x_1+x_3+x_4+x_5+x_6+x_2)\cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_7^{(7)} =\\
&+y_0\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\cdot d_{07}\\
&-y_1\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\cdot d_{17}\\
&+y_2\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&-y_3\cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&+y_4\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}\\
&-y_5\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\cdot d_{57}\\
&+y_6\cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\cdot d_{67}\\
&-y_7\cdot d_{07}\cdot d_{17}\cdot d_{27}\cdot d_{37}\cdot d_{47}\cdot d_{57}\cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

2.2 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation)

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \\ \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \\ \cdot d_{45} \cdot d_{46} \\ \cdot d_{56} \end{aligned}$$

ergibt sich das sextische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & a_0^{(6)} = \\ & +y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \\ & -y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ & +y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \\ & -y_3 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \\ & +y_4 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \\ & -y_5 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \\ & +y_6 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1^{(6)} = \\ & -y_0 \cdot \\ & (\\ & \quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ & \quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &) \\ & \quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot \\ & +y_1 \cdot \\ & (\\ & \quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ & \quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &) \\ & \quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ & -y_2 \cdot \\ & (\\ & \quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ & \quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ & \quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &) \\ & \quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&+y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\\
&-y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\\
&a_2^{(6)}=\\
&+y_0\cdot\\
&(\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_1\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\\
&+y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&+y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}
\end{aligned}
$$

$-y_5 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_6$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56}$
$+y_6 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 v$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
$)$
$\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}$
$a_3^{(6)} =$
$-y_0 \cdot$
$($
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}$
$+y_1 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16}$

$$
\begin{aligned}
&-y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&+y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_6\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}\\
&a_4^{(6)}=\\
&+y_0\cdot\\
&(\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\\
&-y_1\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\\
&+y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+y_4\cdot\\
&(\\
&\qquad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_5+x_6)\\
&\qquad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_5+x_6)\\
&\qquad +x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\qquad +x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\qquad +x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\qquad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&-y_5\cdot\\
&(\\
&\qquad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_6)\\
&\qquad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_6)\\
&\qquad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_6)\\
&\qquad +x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\qquad +x_4\cdot x_6\\
&)\\
&\qquad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\\
&+y_6\cdot\\
&(\\
&\qquad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&\qquad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&\qquad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\qquad +x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\qquad +x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\qquad \cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_5^{(6)} =\\
&-y_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\\
&+y_1\cdot(x_0+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\\
&-y_2\cdot(x_0+x_1+x_3+x_4+x_5+x_6)\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&+y_3\cdot(x_0+x_1+x_2+x_4+x_5+x_6)\cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&-y_4\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_5+x_6)\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&+y_5\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_6)\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\\
&-y_6\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_6^{(6)} =\\
&+y_0\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\cdot d_{06}\\
&-y_1\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\\
&+y_2\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&-y_3\cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&+y_4\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&-y_5\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\\
&+y_6\cdot d_{06}\cdot d_{16}\cdot d_{26}\cdot d_{36}\cdot d_{46}\cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

2.3 Quintische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\ \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\ \cdot d_{45} \end{aligned}$$

ergibt sich das quintische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&a_0^{(5)} = \\
&-y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\
&+y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\
&-y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\
&+y_3 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\
&-y_4 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \\
&+y_5 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1^{(5)} = +y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\
&+y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\
&-y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35}
\end{aligned}$$

$+y_4 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5$
$\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5$
$\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45}$
$-y_5 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4)$
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$
$\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
$\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}$
$a_2^{(5)} =$
$-y_0 \cdot$
$($
$\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)$
$\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05}$
$+y_1$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15}$
$-y_2 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25}$
$+y_3 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5)$
$\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5$
$\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35}$

$$
\begin{aligned}
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_5)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\\
&+y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_4)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_4)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_3^{(5)}=\\
&+y_0\\
&(\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\\
&-y_1\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_2\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\\
&+y_2\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_1\cdot(x_3+x_4+x_5)\\
&\quad +x_3\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_4+x_5)\\
&\quad +x_1\cdot(x_2+x_4+x_5)\\
&\quad +x_2\cdot(x_4+x_5)\\
&\quad +x_4\cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+y_4\cdot\\
&(\\
&\qquad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_5)\\
&\qquad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_5)\\
&\qquad +x_2\cdot(x_3+x_5)\\
&\qquad +x_3\cdot x_5\\
&)\\
&\qquad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\\
&-y_5\cdot\\
&(\\
&\qquad +x_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4)\\
&\qquad +x_1\cdot(x_2+x_3+x_4)\\
&\qquad +x_2\cdot(x_3+x_4)\\
&\qquad +x_3\cdot x_4\\
&)\\
&\qquad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_4^{(5)} =\\
&-y_0\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\\
&+y_1\cdot(x_0+x_2+x_3+x_4+x_5)\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\\
&-y_2\cdot(x_0+x_1+x_3+x_4+x_5)\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\\
&+y_3\cdot(x_0+x_1+x_2+x_4+x_5)\cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\\
&-y_4\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_5)\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\\
&+y_5\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_5^{(5)} =\\
&+y_0\cdot d_{01}\cdot d_{02}\cdot d_{03}\cdot d_{04}\cdot d_{05}\\
&-y_1\cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\\
&+y_2\cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\\
&-y_3\cdot d_{13}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\\
&+y_4\cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\\
&-y_5\cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

2.4 Biquadratische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\ \cdot d_{34} \end{aligned}$$

ergibt sich das biquadratische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

mit den Koeffitzienten:

$$\begin{aligned}
&a_0^{(4)} = \\
&+y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\
&-y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\
&+y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\
&-y_3 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\
&+y_4 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1^{(4)} = \\
&-y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\
&+y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 +) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\
&-y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\
&+y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_4) \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\
&-y_4 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&a_2^{(4)} = \\
&+y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\
&+y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\
&-y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_4) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\
&+y_4 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_3^{(4)} = \\
&-y_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\
&+y_1 \cdot (x_0 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\
&-y_2 \cdot (x_0 + x_1 + x_3 + x_4) \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\
&+y_3 \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + x_4) \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\
&-y_4 \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_4^{(4)} = \\
&+y_0 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\
&-y_1 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\
&+y_2 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\
&-y_3 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\
&+y_4 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}
$$

2.5 Kubische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\ \cdot d_{23} \end{aligned}$$

ergibt sich das kubische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&a_0^{(3)} = \\
&-y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\
&+y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\
&-y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \\
&+y_3 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1^{(3)} = \\
&+y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\
&+y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3) \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \\
&-y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2) \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_2^{(3)} = \\
&-y_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\
&+y_1 \cdot (x_0 + x_2 + x_3) \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\
&-y_2 \cdot (x_0 + x_1 + x_3) \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \\
&+y_3 \cdot (x_0 + x_1 + x_2) \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_3^{(3)} = \\
&+y_0 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\
&-y_1 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\
&+y_2 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \\
&-y_3 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}
\end{aligned}$$

2.6 Quadratische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} &d_{01} \cdot d_{02} \\ &\cdot d_{12} \end{aligned}$$

ergibt sich das quadratische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2$$

mit den Koeffizienten:

$a_0^{(2)} =$
$+y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot d_{01} \cdot d_{02}$
$-y_1 \cdot x_0 \cdot x_2 \cdot d_{01} \cdot d_{12}$
$+y_2 \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot d_{02} \cdot d_{12}$

$a_1^{(2)} =$
$-y_0 \cdot (x_1 + x_2) \cdot d_{01} \cdot d_{02}$
$+y_1 \cdot (x_0 + x_2) \cdot d_{01} \cdot d_{12}$
$-y_2 \cdot (x_0 + x_1) \cdot d_{02} \cdot d_{12}$

$a_2^{(2)} =$
$+y_0 \cdot d_{01} \cdot d_{02}$
$-y_1 \cdot d_{01} \cdot d_{12}$
$+y_2 \cdot d_{02} \cdot d_{12}$

2.7 Lineare Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$d_{01}$$

ergibt sich das lineare Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1$$

mit den Koeffizienten:

$a_0^{(1)} =$
$-y_0 \cdot x_1 \cdot d_{01}$
$+y_1 \cdot x_0 \cdot d_{01}$

$a_1^{(1)} =$
$+y_0 \cdot d_{01}$
$-y_1 \cdot d_{01}$

LaTeX