Gaußsches Wellenpaket - GWP

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 2. September 2007 – Letzte Revision: 5. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Gaußsches Wellenpaket - Ortsraum **3**
1.1 Mathematische Beschreibung . . . 4
1.2 Extrempunkt der Hüllkurve . . . 5
1.3 Wendepunkte der Hüllkurve . . . 6
1.4 Fläche der Hüllkurve . . . 7
1.5 Halbwertsbreite der Hüllkurve . . . 8
1.6 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 9
1.7 Normierung des GWP im Ortsraum . . . 10
1.8 Dispersion . . . 11
1.9 Autokorrelation, Leistungsdichtespektrum . . . 12

2 Gaußsches Wellenpaket - Frequenzraum **13**
2.1 Extrempunkt der Hüllkurve . . . 14
2.2 Wendepunkte der Hüllkurve . . . 15
2.3 Fläche der Hüllkurve . . . 16
2.4 Halbwertsbreite der Hüllkurve . . . 17
2.5 Normierung des GWP im Frequenzraum . . . 18
2.6 Dispersion . . . 19

3 Vergleich GWP im Orts- und im Frequenzraum **20**

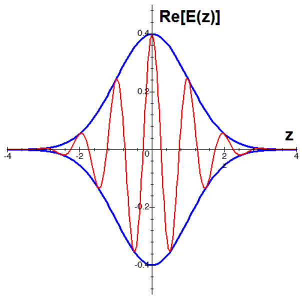
Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Gaußsches Wellenpaket - Ortsraum

Standardwelle für die Quantenphysik, Optik. Gleichzeitig repräsentiert das GWP ein Elektron (Hypothese von de Broglie). [001]ff.



Gaußsches Wellenpaket

1.1 Mathematische Beschreibung

Die mathematische Beschreibung für das unnormierte GWP erfolgt durch:

$$E\left(z;t\right)=e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}\cdot e^{ik(z-ct)}$$

Für das GWP wird der Re-Anteil benötigt:

$$E\left(z;t\right)=\left(\cosh\frac{1}{2}\frac{\left(z-ct\right)^2}{b^2}-\sinh\frac{1}{2}\frac{\left(z-ct\right)^2}{b^2}\right)\cdot\left(\cos k\left(ct-z\right)-i\sin k\left(ct-z\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$E\left(z;t\right)=\begin{cases}+\cosh\frac{1}{2}\frac{(z-ct)^2}{b^2}\cdot\cos k\left(ct-z\right)-i\cosh\frac{1}{2}\frac{(z-ct)^2}{b^2}\cdot\sin k\left(ct-z\right)\\ -\sinh\frac{1}{2}\frac{(z-ct)^2}{b^2}\cdot\cos k\left(ct-z\right)+i\sinh\frac{1}{2}\frac{(z-ct)^2}{b^2}\cdot\sin k\left(ct-z\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Re }\left[E\left(z;t\right)\right]=\left(\cosh\frac{1}{2}\frac{\left(z-ct\right)^2}{b^2}-\sinh\frac{1}{2}\frac{\left(z-ct\right)^2}{b^2}\right)\cdot\cos k\left(ct-z\right)$$

$\Rightarrow$

$$\text{Re }\left[E\left(z;t\right)\right]=e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}\cdot\cos k\left(ct-z\right)$$

Die Hüllkurve davon:

$$\left[E\left(z;t\right)\right]_H=e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

Für den Im-Anteil analog:

$$\text{Im }\left[E\left(z;t\right)\right]=e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}\cdot\sin k\left(z-ct\right)$$

1.2 Extrempunkt der Hüllkurve

Der Extrempunkt P_E der Hüllkurve stellt eine wichtige Größe dar.

$$[E(z;t)]'_H = \frac{d}{dz} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$[E(z;t)]'_H = \frac{ct-z}{b^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{ct-z}{b^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$z = ct$$

$\Rightarrow$

$$[E(z=ct)]_H = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$

$$P_E(z=ct;1)$$

1.3 Wendepunkte der Hüllkurve

Die Wendepunkte P_W der Hüllkurven stellen eine wichtige Größe dar.

$$[E(z;t)]''_H = \frac{d^2}{dz^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$[E(z;t)]''_H = \frac{b^2 - (z-ct)^2}{b^4} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \frac{b^2 - (z-ct)^2}{b^4} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$(z-ct)^2 = b^2$$

$\Rightarrow$

$$z_1 - ct = +b \qquad z_2 - ct = -b$$

$\Rightarrow$

$$z_1 = b + ct \qquad z_2 = ct - b$$

Die Differenz beider:

$$\Delta z = z_1 - z_2 = b + ct - ct + b = 2b$$

Weiterhin:

$$[E(z_1 = b + ct)]_H = [E(z_2 = ct - b)]_H = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$$

$\Rightarrow$

$$P_{W,1}\left(z_1; e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad P_{W,2}\left(z_2; e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

1.4 Fläche der Hüllkurve

Die Fläche der Hüllkurve zur Abszisse.

$$\int E\left(z;t\right)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

$\Rightarrow$

$$\int E\left(z;t\right)_H = \sqrt{2\pi} \cdot b$$

1.5 Halbwertsbreite der Hüllkurve

Die Halbwertsbreite der Hüllkurve ist von Interesse.

$$[E(z;t)]_H = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot [E(z=ct)]_H$$

$\Rightarrow$

$$z_{FWHM} = ct \pm \sqrt{2b^2 \cdot \ln 2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta z_{FWHM} = 2b \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta z_{FWHM} = \Delta z \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

Mit Δz dem Abstand der Wendepunkte untereinander.

$$\Delta z_{FWHM} \approx 1,177 \cdot \Delta z$$

$\Rightarrow$

$$\Delta z_{FWHM} \approx 2,355 \cdot b$$

Die Halbwertsbreite ist denach $1,177$-fach größer als die Wendepunktbreite.

1.6 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons bzw. Photons innerhalb des GWP soll errechnet werden. Der Mittelwert der Hüllkurve wird gesucht:

$$\int |E(z)|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

$\Rightarrow$

$$\int |E(z;t)|_H^2 = ct \cdot \sqrt{2\pi} \cdot b$$

Für den Mittel- oder Erwartungswert des Ortes gilt:

$$\frac{\int |E(z;t)|_H^2}{\int E(z;t)_H} = ct \equiv z_0$$

Wobei z_0 der Mittelwert des Aufenthaltsortes darstellt. Die mittlere quadratische Abweichung von z_0 beträgt:

$$\int |E(z-z_0;t)|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z-ct)^2 \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

$\Rightarrow$

$$\int |E(z-z_0;t)|_H^2 = \sqrt{2\pi} \cdot b^3$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\int |E(z-z_0;t)|_H^2}{\int E(z;t)_H} = b^2$$

Die Standardabweichung demnach:

$$\sqrt{\frac{\int |E(z-z_0;t)|_H^2}{\int E(z;t)_H}} = b$$

1.7 Normierung des GWP im Ortsraum

Die Normierung des GWP auf 1:

$$\frac{E\left(z;t\right)}{\int E\left(z;t\right)_H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b}\cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}\cdot e^{ik(z-ct)}$$

Die Hüllkurve dazu:

$$\frac{E\left(z;t\right)_H}{\int E\left(z;t\right)_H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b}\cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

Die Wellenfunktion:

$$\psi\left(z;t\right) = \sqrt{\frac{E\left(z;t\right)_H}{\int E\left(z;t\right)_H}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\cdot b}}\cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{4b^2}}$$

1.8 Dispersion

Wird berechnet über:

$$x_w^2 = \kappa \cdot y_E$$

unnormiert

$$\frac{1}{b^2} = \kappa \cdot 1$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{1}{b^2}$$

normiert

$$\frac{1}{b^2} = \kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2\pi}}{b}$$

1.9 Autokorrelation, Leistungsdichtespektrum

Die Autokorrelationsfunktion für eine nichtperiodische, symmetrische Funktion:

$$E_{xx}\left(z\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2b^2}} \cdot e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2b^2}} dz_0$$

$\Rightarrow$

$$E_{xx}\left(z\right) = e^{-\frac{z^2}{2b^2}}$$

Es wird das Leistungsdichtespektrum ermittelt:

$$F\left[E\left(z\right)\right] = \left[E\left(\omega\right)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2b^2}} \cdot e^{-i \cdot k \cdot c \cdot z}$$

$\Rightarrow$

$$F\left[E\left(z\right)\right] = \left[E\left(\omega\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{k^2 \cdot c^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$F\left[E\left(z\right)\right] = \left[E\left(\omega\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

Wobei der Fourierterm folgendermaßen entwickelt wird:

$$e^{-i\omega z}$$

Mit:

$$k = \tfrac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda = \tfrac{c}{f}$$

$\Rightarrow$

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$\Rightarrow$

$$\omega = kc$$

$\Rightarrow$

$$e^{-ikcz}$$

Damit ist die Fouriertransformation in den Frequenzraum abgeschlossen.

2 Gaußsches Wellenpaket - Frequenzraum

Gegeben ist ein GWP im Frequenzraum.

$$[E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$[E(\omega)]_H = e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

2.1 Extrempunkt der Hüllkurve

Der Extrempunkt P_E der Hüllkurve stellt eine wichtige Größe dar.

$$[E(\omega)]'_H = \frac{d}{d\omega} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$[E(\omega)]'_H = -\omega \cdot b^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$-\omega \cdot b^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} = 0$$

⇒

$$\omega = 0$$

⇒

$$[E(0)]_H = 1$$

⇒

$$P_E(0;1)$$

2.2 Wendepunkte der Hüllkurve

Die Wendepunkte P_W der Hüllkurven stellen eine wichtige Größe dar.

$$[E(\omega)]''_H = \frac{d^2}{d\omega^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$[E(\omega)]''_H = \left(\omega^2 \cdot b^4 - b^2\right) \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \left(\omega^2 \cdot b^4 - b^2\right) \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \omega^2 \cdot b^2 - 1$$

$\Rightarrow$

$$\omega_1 = +\frac{1}{b} \qquad \omega_2 = -\frac{1}{b}$$

Die Differenz beider:

$$\Delta\omega = \frac{2}{b}$$

Weiterhin:

$$\left[E\left(+\frac{1}{b}\right)\right]_H = \left[E\left(-\frac{1}{b}\right)\right]_H = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$$

$\Rightarrow$

$$P_{W,1}\left(+\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad P_{W,2}\left(-\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

2.3 Fläche der Hüllkurve

Die Fläche der Hüllkurve zur Abszisse.

$$\int E\left(\omega\right)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} d\omega$$

$\Rightarrow$

$$\int E\left(\omega\right)_H = \frac{\sqrt{2\pi}}{b}$$

2.4 Halbwertsbreite der Hüllkurve

Die Halbwertsbreite der Hüllkurve ist von Interesse.

$$[E(\omega)]_H = e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot [E(0)]_H$$

$\Rightarrow$

$$\omega_{FWHM} = \pm \frac{1}{b}\sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\omega_{FWHM} = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\omega_{FWHM} = \Delta\omega \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

Mit $\Delta\omega$ dem Abstand der Wendepunkte untereinander.

$$\Delta\omega_{FWHM} \approx 1,177 \cdot \Delta\omega$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\omega_{FWHM} \approx 2,355 \cdot \frac{1}{b}$$

2.5 Normierung des GWP im Frequenzraum

Die Normierung des GWP auf 1:

$$[E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [E(\omega)]\, d\omega = 1$$

2.6 Dispersion

Wird berechnet über:

$$x_w^2 = \kappa \cdot y_E$$

unnormiert

$$b^2 = \kappa \cdot 1$$

⇒

$$\kappa = b^2$$

normiert

$$b^2 = \kappa \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2}$$

⇒

$$\kappa = \sqrt{2\pi} \cdot b$$

3 Vergleich GWP im Orts- und im Frequenzraum

Die ermittelten Größen im tabellarischen Vergleich.

	$\mathbf{E}\left(\mathbf{z};\mathbf{t}\right)$	$\mathbf{E}\left(\omega\right)$
$\mathbf{P_E}$	$z = ct\,;1$	$0\,;1$
$\mathbf{P_{W;1}}$	$b + ct\,;e^{-\frac{1}{2}}$	$+\frac{1}{b}\,;e^{-\frac{1}{2}}$
$\mathbf{P_{W;2}}$	$ct - b\,;e^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{b}\,;e^{-\frac{1}{2}}$
$\boldsymbol{\Delta}$	$\Delta z = 2 \cdot b^{+1}$	$\Delta\omega = 2 \cdot b^{-1}$
$\mathbf{A}$	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{+1}$	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{-1}$
FWHM	$2,355 \cdot b^{+1}$	$2,355 \cdot b^{-1}$
$\int = \mathbf{1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot b^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot b^{+1}$
κ	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{-1}$	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{+1}$

LaTeX 2_ε