Elliptische Regression – Achsen und Winkel

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 21. Juni 2014 - Letzte Revision: 23. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

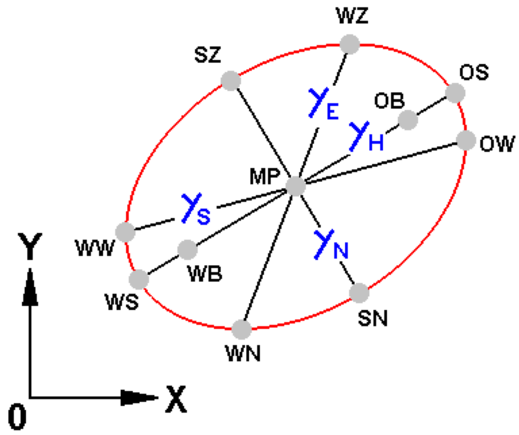
Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Die Elliptische Regression – Achsen und Winkel

1.1 Einleitung

Einleitung



[001] Im Teil „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde die Durchführung einer Regression beschrieben mit dem Ergebnis der mathematischen Darstellung einer Ellipse.

Im weiteren Verlauf werden die Achsen der Ellipse beschrieben. Dabei wird definiert:

– Die Hauptachse der Ellipse y_H
– Die Nebenachse der Ellipse y_N
– Die Scheitelachse der Ellipse y_S
– Die Extremaachse der Ellipse y_E

Drei Darstellungsformen der Achsfunktionen sind angegeben:

– Die Anstiegsdarstellung (der Anstieg a der Hauptachse als Basis der Beschreibung)
– Die Koeffizientendarstellung (die Koeffizienten A und B der Ellipse als Basis)
– Die goniometrische Darstellung (der Kippwinkel φ der Ellipse als Basis)

So kann als vorangehendes Beispiel die Hauptachse in drei funktionalen Zusammenhängen erscheinen.

$$y_H = a \cdot x_H + b = \tan\varphi \cdot x_H + b = \frac{B}{A - e^2} \cdot x_H + b$$

Zwecks weiterer Begriffsbestimmungen und zum Verständnis im Verlauf siehe zuerst [1] und [2].

[1] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“
[2] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression – Punkte“

1.2 Herleitung der Achsen

1.2.1 Die Hauptachse y_H – Punkte WS und OS

Hauptachse

Punktdefinitionen:

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\tfrac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

Sowie:

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\tfrac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WS}}{x_H - x_{WS}} = \frac{y_{OS} - y_{WS}}{x_{OS} - x_{WS}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OS} - y_{WS}) \cdot (x_H - x_{WS}) + y_{WS} \cdot (x_{OS} - x_{WS})}{x_{OS} - x_{WS}}$$

Substituieren von y_{WS} und y_{OS} und anschließendes Umstellen.

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

Hauptachse

1.2.2 Die Hauptachse y_H – Punkte WB und OB

Punktdefinitionen:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WB}}{x_H - x_{WB}} = \frac{y_{OB} - y_{WB}}{x_{OB} - x_{WB}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OB} - y_{WB}) \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB} \cdot (x_{OB} - x_{WB})}{x_{OB} - x_{WB}}$$

Substituieren von $y_{WB}; y_{OB}$ und $x_{WB}; x_{OB}$ sowie anschließendes Umstellen.

$$y_H = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB}$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \tfrac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \tfrac{1}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot x_{WB} + y_{WB}$$

Eine Nebenbedingung für WB wird genutzt.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

1.2.3 Die Hauptachse y_H – Punkt MP und Anstieg a

Hauptachse

Gegeben ist der Anstieg a und der Mittelpunkt der Ellipse mit den Koordinaten:

$$x_{MP} = (d - b) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \qquad y_{MP} = \left(a^2 \cdot d + b\right) \cdot \cos^2\varphi$$

Die Punktrichtungsform wird genutzt.

$$\frac{y_H - y_{MP}}{x_H - x_{MP}} = a$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot (x_H - x_{MP}) + y_{MP}$$

Substituieren von y_{MP} und x_{MP} sowie anschließendes Umstellen. (Die Nebenbedingung $y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$ kann auch genutzt werden)

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot d \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a^2 \cdot d \cdot \cos^2\varphi + b \cdot \cos^2\varphi$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \tfrac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \tfrac{1}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

Nebenachse

1.2.4 Die Nebenachse y_N – Punkte SZ und SN

Punktdefinitionen:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_N - y_{SN}}{x_N - x_{SN}} = \frac{y_{SN} - y_{SZ}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = \frac{(y_{SN} - y_{SZ}) \cdot (x_N - x_{SN}) + y_{SN} \cdot (x_{SN} - x_{SZ})}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von y_{SZ} in und y_{SN} in der Klammer sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - 2 \cdot e \cdot \cos\varphi \cdot \frac{x_N - x_{SN}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von x_{SZ} in und x_{SN} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \tfrac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \tfrac{1}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = y_{SN} - \frac{1}{a} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Eine Nebenbedingung für SN wird genutzt.

$$y_{SN} = -\frac{1}{a} \cdot x_{SN} + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x_N + d$$

Eine Nebenbedingung für a wird genutzt.

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

Was der allgemeinen Definition der Nebenachse entspricht.

1.2.5 Die Scheitelachse y_S – Punkte OW und WW

Scheitelachse

Punktdefinitionen:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A} \qquad y_{OW} = y_{MP} + \tfrac{B}{\sqrt{A}}$$

Sowie:

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad y_{WW} = y_{MP} - \tfrac{B}{\sqrt{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_S - y_{OW}}{x_S - x_{OW}} = \frac{y_{WW} - y_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{(y_{WW} - y_{OW}) \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{OW} \cdot (x_{WW} - x_{OW})}{x_{WW} - x_{OW}}$$

Substituieren von y_{WW} in und y_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = 2 \cdot \frac{-B}{\sqrt{A}} \cdot \frac{x_S - x_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}} + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{WW} in und x_{OW} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S - \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

Lässt sich y_S leicht vereinfachen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$a = \tan\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_S ist möglich über die Tatsache, dass auf y_S der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da vorangegangen per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot \tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \varepsilon_L^2 \cdot \frac{a}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right)}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_{MP} + b$$

1.2.6 Die Extremaachse y_E – Punkte WZ und WN

Extremaachse

Punktdefinitionen:

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\tfrac{A}{B^2+f^2\cdot e^2}} \qquad y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\tfrac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}}$$

Sowie:

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\tfrac{A}{B^2+f^2\cdot e^2}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\tfrac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_E - y_{WZ}}{x_E - x_{WZ}} = \frac{y_{WN} - y_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

⇒

$$y_E = \frac{(y_{WN} - y_{WZ}) \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{WZ} \cdot (x_{WN} - x_{WZ})}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

Substituieren von y_{WN} in und y_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = -2\sqrt{\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}} \cdot \frac{x_E - x_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}} + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WN} in und x_{WZ} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_E - \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

⇒

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Der Koeffizient wird gesplittet:

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B}{A} - \frac{f^2\cdot e^2}{A\cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2\cdot a^2 + f^2}$$

⇒

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_E + a \cdot e^2 \cdot \left(\frac{1+a^2}{e^2\cdot a^2+f^2} - \frac{f^2}{a\cdot A\cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{1}{A} = \frac{1+a^2}{e^2\cdot a^2 + f^2}$$

⇒

$$y_E = \frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a\cdot B - f^2}{A\cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B} = \frac{f^2\cdot\sin^2\varphi + e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$$

⇒

$$y_E = \frac{f^2\cdot\sin^2\varphi + e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a\cdot B - f^2}{A\cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} = \frac{-1}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_E ist möglich über die Tatsache, dass auf y_E der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_E - \frac{e^2 \cdot (1 + a^2)}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_{MP} + b$$

1.3 Herleitung der Schnittwinkel

1.3.1 Der Winkel α zwischen der Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Winkel α

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\alpha = m$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Anstiegs-	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

Winkel β

1.3.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

Rechts – Koeffizientendarstellung

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$\left\lvert\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_N	∞	0	$\left\lvert\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_S	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	0	$\left\lvert\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_E	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\rvert$	0

Links – Goniometrische Darstellung

1.3.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β

Koeffizient ρ

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY}^2 = a^2 \cdot \frac{f^2}{e^2}$$

$\Rightarrow$

$$\tfrac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2\varphi \quad \leftrightarrow \quad \tfrac{e^2}{f^2} = \tfrac{\tan^2\varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\|\tan^3\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot^3\varphi\right\|$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2} \left\|\tan\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^4\varphi - \rho_{XY}^{+4}\cdot\cos^4\varphi}\right\|$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$

Da für das Quadrat eines Korrelationskoeffizienten gilt

$$0 \le \rho_{XY}^2 \le 1$$

und $\rho_{XY}^2 = \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$ für alle Fälle gegeben ist, kann definiert werden:

$$0 \le \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi \le 1$$

$\Rightarrow$

$$0 \le \tan^2\varphi \le \frac{e^2}{f^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 \le \tan\varphi \le \tfrac{e}{f} \qquad -\tfrac{e}{f} \le \tan\varphi \le 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \le \varphi \le \arctan\tfrac{e}{f} \qquad \pi - \arctan\tfrac{e}{f} \le \varphi \le \pi$$

Damit kann man für den ersten Quadranten (und für den zweiten bei Bedarf auch) ein maximales φ_{GRENZ} definieren.

$$\varphi_{GRENZ} = \pm \arctan \frac{e}{f}$$

Bei einer strengen Einhaltung der Forderung $f > e$ ergibt sich dann:

$$0 \leq \frac{e}{f} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$-45^\circ \equiv -\frac{\pi}{4} = \varphi_{MIN} \leq \varphi \leq \varphi_{MAX} = +\frac{\pi}{4} \equiv +45^\circ$$

Für $\varphi_{Grenz} = \pm\frac{\pi}{2} \equiv \pm 90^\circ$ muss $f > e$ als Bedingung fallen gelassen werden.

Die Beschreibung der lineare Funktion von φ_{GRENZ}:

$$y_{GRENZ} = \pm \frac{e}{f} \cdot x_{GRENZ} + b$$

2 Ein Beispiel – Achsen und Winkel

Beispiel

$$a = 0,5928 \qquad b = 37,5079 \qquad c = -1,6869 \qquad d = 1621,1455$$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,65° \qquad \rho_{XY} = 0,868$$

$$A = 126935,44 \qquad B = 34486,8$$

$$e = 262,22 \qquad f = 383,9$$

$$x_{MP} = 694,6692986$$

$\Rightarrow$[3]

$$y_H = 0,592 \cdot x_H + 37,507 \qquad y_N = -1,686 \cdot x_N + 1621,145$$

$$y_S = 0,271 \cdot x_S + 260,506 \qquad y_E = 2,586 \cdot x_E - 1347,679$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Anstiegs-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Goniometrische	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$+0,276$	$+0,787$
y_N	∞	0	$+3,615$	$+1,270$
y_S	$+0,276$	$+3,616$	0	$+1,359$
y_E	$+0,787$	$+1,270$	$+1,359$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$
Koeffizienten-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Anstiegs-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Goniometrische	$+30,66$	$+120,66$	$+15,197$	$+68,864$

$\Rightarrow$

[3] Beispiel entnommen aus: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\beta° =$	$\beta° =$	$\beta° =$	$\beta° =$
y_H	0	$+90$	$+15,459$	$+38,203$
y_N	$+90$	0	$+74,540$	$+51,796$
y_S	$+15,456$	$+74,543$	0	$+53,663$
y_E	$+38,210$	$+51,789$	$+53,666$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$
y_S	$+0,753$	$+0,752$	-
y_E	$+0,753$	$+0,753$	$+0,753$

$\Rightarrow$

$$\frac{e}{f} = \pm 0,683$$

$\Rightarrow$

$$\varphi_{GRENZ} = \pm \arctan \tfrac{e}{f} = \pm 0,600 \equiv \pm 34,33° \qquad \varphi_{VORH} = 0,535 \equiv 30,65°$$

Und:

$$y_{GRENZ} = \pm 0,683 \cdot x_{GRENZ} + 37,5079$$

LaTeX