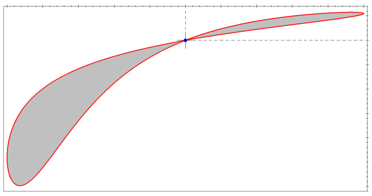
Elliptische Regression in Beispielen



Elliptic regression in examples

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 12. Juli 2025 - Letzte Revision: 14. Juli 2025

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

---

1 Beispiel MKQ

MKQ

Beispielswerte entnommen aus [Rol] und mit dem Verfahren aus [Dipb] berechnet.

- **Beispielswerte**

i	x_i	y_i
1	+0, 192 2	-6, 340 0
2	+0, 014 9	-7, 213 8
3	-0, 208 7	-6, 511 2
4	-0, 001 9	-6, 610 3
5	+0, 031 8	-6, 565 2
6	-0, 008 3	-6, 662 1
7	-0, 320 6	-6, 644 1
8	-0, 592 7	-7, 436 8
8	-0, 893 3	-53, 983 5

$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

- **Ergebnisse, numerisch**

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{6,429826 \cdot 8 - 0,8933 \cdot 53,9835}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{3,215147}{3,489055} = 0,922$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{-0,535880 \cdot 53,9835 + 6,429826 \cdot 0,8933}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{-23,184914}{3,489055} = -6,645$$

$\Rightarrow$

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{3,489055}{3,215147} = -1,085$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} - 1,085 \cdot \frac{0,8933}{8} = -6,869$$

$$x_M = \mu_X = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad y_M = \mu_Y = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1} = -0,922 \cdot \frac{6,869-6,645}{0,922^2+1} = -0,112$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = \frac{b+d \cdot a^2}{1+a^2} = -\frac{6,645+6,869 \cdot 0,922^2}{1+0,922^2} = -6,748$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\left\{f^2\right\}}{n} = \frac{\left\{(x-x_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,436133}{8} = 0,054517$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X \equiv f = 0,234$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\left\{e^2\right\}}{n} = \frac{\left\{(y-y_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,984503}{8} = 0,123063$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y \equiv e = 0,351$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arctan a = \arctan 0,922 = 42,68^\circ \equiv 0,745 \\
\rho_{XY}^{MKQ} &= a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,922 \cdot \frac{0,234}{0,351} = 0,922 \cdot \frac{2}{3} = 0,615 \\
\varepsilon_L &= \sqrt{|e^2-f^2|} = \sqrt{|0,123063-0,054517|} = 0,262 \\
\varepsilon_N &= \sqrt{\frac{|e^2-f^2|}{MAX\,(e^2;f^2)}} = \frac{0,262}{\sqrt{MAX\,(0,123063;0,054517)}} = \frac{0,262}{\sqrt{0,123063}} = 0,747
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{0,123063 \cdot 0,922^2 + 0,054517}{1+0,922^2} = 0,086 \\
B &= 0,922 \cdot \frac{0,054517-0,123063}{1+0,922^2} = -0,034
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

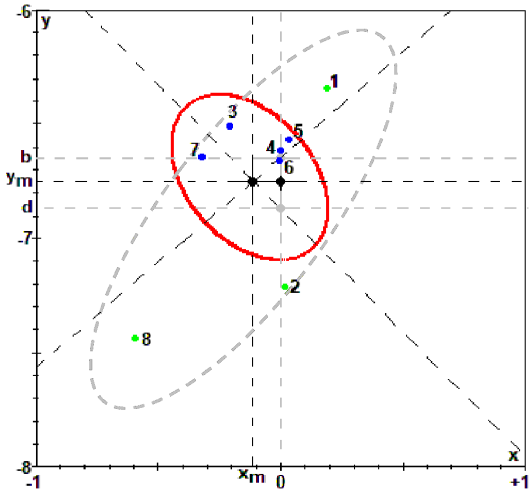
$$\begin{aligned}
\frac{e \cdot f}{A} &= \frac{0,351 \cdot 0,234}{0,086} = 0,955 \\
\frac{B}{A} &= -\frac{0,034}{0,086} = -0,395
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y^\varphi = -6,748 - 0,395 \cdot (x+0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086-(x+0,112)^2}$$

- **Ergebnisse, grafisch**

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass fünf Punkte innerhalb und drei außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Rol].

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgrafen.

x_i	y_i	i	Lage
+0, 192 2	-6, 340 0	1	X
+0, 014 9	-7, 213 8	2	X
-0, 208 7	-6, 511 2	3	O
-0, 001 9	-6, 610 3	4	O
+0, 031 8	-6, 565 2	5	O
-0, 008 3	-6, 662 1	6	O
-0, 320 6	-6, 644 1	7	O
-0, 592 7	-7, 436 8	8	X

2 Beispiel HKA

HKA

Beispiel entnommen aus [Rol]. Vergleiche dazu auch unter [Dipa] die dortige Berechnung.

- **Beispielswerte**

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

- **Ergebnisse, numerisch**

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} = -\frac{0,8933}{8} = -0,112 \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} = -6,748$$

$$V_{XX} = +0,436133$$
$$C = C_{XY} = C_{YX} = +0,401892$$
$$V_{YY} = +0,984503$$

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{8} = \frac{0,984503}{8} = 0,123$$

$\Rightarrow$

$$e = 0,351$$

Und:

$$f^2 = \frac{V_{XX}}{8} = \frac{0,436133}{8} = 0,055$$

$\Rightarrow$

$$f = 0,233$$

$$\rho_{XY}^{HKA} = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}} \cdot \frac{f}{e} = C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} = 0,401892 \cdot \sqrt{\frac{0,984503}{0,436133}} = 0,604$$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = 0,436133 + 0,984503 \pm \sqrt{\left(0,436133 - 0,984503\right)^2 + 4 \cdot 0,401892^2}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 1,197 \qquad \lambda_2 = 0,224$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,421 = V_{XX} + V_{YY}$$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = \frac{0,984503 - 1,197}{0,401892} = -0,529$$

Und:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{0,984503 - 0,224}{0,401892} = +1,892$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} \cdot \frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = -1 = -0,529 \cdot 1.892$$

$$Y_{1;2}\left(X\right) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

$\Rightarrow$

$$Y_1\left(X\right) = -0,529 \cdot X - 6,807$$
$$Y_2\left(X\right) = +1,892 \cdot X - 6,536$$

- Fall $a = +1,892$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1,892^2}{1+1,892^2} = 0,782$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+1,892^2} = 0,218$$
$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{1,892}{1+1,892^2} = 0,413$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123 \cdot 0,782 + 0,055 \cdot 0,218 \qquad C^{(\varphi)} = 0,413 \cdot (0,123 - 0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,108 \qquad C^{(\varphi)} = 0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - \frac{0,028}{0,108} \cdot (X + 0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133 \cdot 0,984503}}{8 \cdot 0,108} \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - 0,259 \cdot (X + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$

• Fall $a = -0,529$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{0,529^2}{1+0,529^2} = 0,218$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+0,529^2} = 0,782$$
$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{-0,529}{1+0,529^2} = -0,413$$

$\Rightarrow$

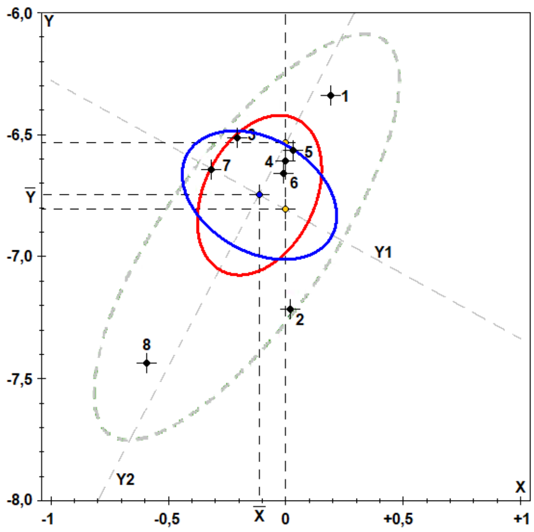
$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2\cdot\sin^2\varphi + f^2\cdot\cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left(e^2 - f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123\cdot 0,218 + 0,055\cdot 0,782 \qquad C^{(\varphi)} = -0,413\cdot(0,123 - 0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,070 \qquad C^{(\varphi)} = -0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\left(X-\bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n\cdot V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X-\bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + \frac{0,028}{0,070}\cdot(X+0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133\cdot 0,984503}}{8\cdot 0,070}\cdot\sqrt{0,070 - (X+0,112)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + 0,4\cdot(X+0,112) \pm 1,17\cdot\sqrt{0,07 - (X+0,112)^2}$$

• **Ergebnisse, grafisch**

In grafischer Darstellung:



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Rol]

3 Beispiel SIG

SIG

Mit den Werten aus [Rol] wurde in [Dipa] als ein dort genutztes Beispiel zwei Ellipsen ermittelt:

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,7032 + 0,400 \cdot x \pm 0,004680 \cdot \sqrt{3591 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2} \\ Y_{3;4}^{(\varphi)} &= -6,7770 - 0,259 \cdot x \pm 0,003036 \cdot \sqrt{5966 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,748 + 0,400 \cdot (x + 0,112) \pm 1,170 \cdot \sqrt{0,070 - (x + 0,112)^2} \\ Y_{3;4}^{(\varphi)} &= -6,748 - 0,259 \cdot (x + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (x + 0,112)^2} \end{aligned}$$

- **Ergebnisse, numerisch**

Nach Überführung in die „Normalform“ können die Koeffizienten α, β, γ und die Mittelwerte $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ ermittelt werden.

$$Y_{1;2;3;4}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{Y}_{1;2;3;4} = -6,748 \qquad \bar{X}_{1;2;3;4} = -0,112$$

Sowie:

$$\begin{aligned} \alpha_{1;2} &= +0,400 & \beta_{1;2} &= \pm 1,170 & \gamma_{1;2} &= +0,070 \\ \alpha_{3;4} &= -0,259 & \beta_{3;4} &= \pm 0,759 & \gamma_{3;4} &= +0,108 \end{aligned}$$

Damit können alle $V^{(\varphi)}$ und $C_{XY}^{(\varphi)} = C_{YX}^{(\varphi)} = C^{(\varphi)}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} &= \gamma_{1;2} = +0,070 \\ V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} &= \gamma_{3;4} = +0,108 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C_{1;2}^{(\varphi)} &= -\alpha_{1;2} \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} = +0,400 \cdot 0,070 = +0,028 \\ C_{3;4}^{(\varphi)} &= -\alpha_{3;4} \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} = -0,259 \cdot 0,108 = -0,028 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V_{XX\,1;2}^{(\varphi)} &= \beta_{1;2}^2 \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} - \alpha_{1;2} \cdot C_{1;2}^{(\varphi)} = \left(\alpha_{1;2}^2 + \beta_{1;2}^2\right) \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} \\ V_{YY\,3;4}^{(\varphi)} &= \beta_{3;4}^2 \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} - \alpha_{3;4} \cdot C_{3;4}^{(\varphi)} = \left(\alpha_{3;4}^2 + \beta_{3;4}^2\right) \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{XX\,1;2}^{(\varphi)} &= \left(0,400^2 + 1,170^2\right) \cdot 0,070 = +0,108 \\ V_{YY\,3;4}^{(\varphi)} &= \left(0,259^2 + 0,759^2\right) \cdot 0,108 = +0,070 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = +0,108 \qquad C^{(\varphi)} = \pm 0,028 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = +0,070$$

Die Eigenwerte $\lambda_1^{(\varphi)}$ und $\lambda_2^{(\varphi)}$.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1^{(\varphi)} = 0,123 \qquad \lambda_2^{(\varphi)} = 0,055$$

Wobei gelten muss:

$$\lambda_1^{(\varphi)} + \lambda_1^{(\varphi)} = 0,123 + 0,055 = 0,178 = 0,108 + 0,070 = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}$$

Die ungedrehten Varianzen V und Covarianzen C sind berechenbar.

$$\frac{V_{XX \leftarrow \lambda_1;1, YY \leftarrow \lambda_2;1}}{n} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;1}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = 0,055 \qquad \frac{V_{YY;1}}{n} = 0,123$$

Und:

$$\frac{V_{XX \leftarrow \lambda_1;2, YY \leftarrow \lambda_2;2}}{n} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;2}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = 0,076 \qquad \frac{V_{YY;2}}{n} = 0,101$$

Der Wert für n ist aus [Dipa] bekannt mit $n = 8$. Es ist jedoch auch ohne der Kenntnis von n möglich, weiter zu rechnen.

$$V_{XX;1} = 8 \cdot 0,055 = 0,440 \qquad V_{YY;1} = 8 \cdot 0,123 = 0,984$$
$$V_{XX;2} = 8 \cdot 0,076 = 0,610 \qquad V_{YY;2} = 8 \cdot 0,101 = 0,808$$

Somit können die Funktionsgleichungen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen genannt werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{XX}}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{YY}}}$$

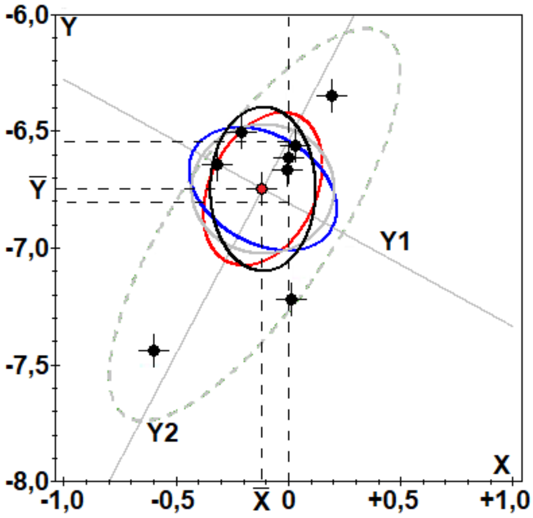
⇒

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0°)} = -6,748 \pm \sqrt{0,984} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X+0,112)^2}{0,440}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90°)} = -6,748 \pm \sqrt{0,610} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X+0,112)^2}{0,808}}$$

- **Ergebnisse, grafisch**

Grafisch veranschaulicht.



Grau die Ellipsenachsen mit Mittelpunkt aus [Rol],
Rot regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - I aus [Dipa],
Blau regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - II aus [Dipa],
Grau abszissenparallele Ellipse, **Schwarz** ordinatenparallele Ellipse
Weiterhin eingezeichnet, der originale Datensatz aus [Rol] und grau gestrichelt, die dort genutzte Ellipse.

4 Beispiel MKQ - ZEN+DRE

MKQ-ZEN+DRE

Nach Messwerten in [Rol] sind in [Dipb] Datenpunkte zu einer Elliptischen Regression angegeben.

- **Beispielswerte**

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

- **Ergebnisse, numerisch**

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$X_m = \frac{\{X_i\}}{n} = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad Y_m = \frac{\{Y_i\}}{n} = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Sowie:

$$V_{XX} = \left\{(X_i - X_m)^2\right\} = 0,436133 \approx 0,436$$
$$V_{YY} = \left\{(Y_i - Y_m)^2\right\} = 0,984503 \approx 0,984$$
$$C_{XY} = C_{YX} = C = \{(X_i - X_m) \cdot (Y_i - Y_m)\} = 0,401892 \approx 0,402$$

Damit sind die neuen Werte für X_i' und Y_i' und weitere berechenbar.

i	X_i	Y_i	X_i'	Y_i'
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 500	+0, 094
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 223	-0, 428
3	-0, 208 7	-6, 511 2	+0, 089	+0, 240
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 174	+0, 027
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 229	+0, 037
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 134	-0, 007
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 083	+0, 218
8	-0, 592 7	-7, 436 8	-0, 821	-0, 181
8	-0, 893 3	-53, 983 5	0	0

i	$X_i' \cdot X_i'$	$Y_i' \cdot Y_i'$	$X_i' \cdot Y_i'$
1	+0, 250	+0, 009	+0, 047
2	+0, 050	+0, 184	+0, 095
3	+0, 008	+0, 058	+0, 021
4	+0, 030	+0, 001	+0, 005
5	+0, 053	+0, 001	+0, 008
6	+0, 018	+0, 000	-0, 001
7	+0, 007	+0, 048	-0, 018
8	+0, 673	+0, 033	+0, 148
8	+1, 089	+0, 334	+0, 305

Fortfahrend die zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$V'_{XX} = \left\{ {X'_i}^2 \right\} = 1,089$$
$$V'_{YY} = \left\{ {Y'_i}^2 \right\} = 0,334$$
$$C'_{XY} = C'_{YX} = C' = \{X'_i \cdot Y'_i\} = 0,305$$

$\Rightarrow$

$$Y'_{1;2} = \pm 0,554 \cdot \sqrt{0,136 - x^2}$$

Die Winkel $\tan\varphi$ und $\tan\varphi'$ der unzentrierten und der zentrierten Ellipse im Vergleich.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\frac{0,436}{0,402} = -1,085 \qquad \tan\varphi' = -\frac{V'_{XX}}{C'} = -\frac{1,089}{0,305} = -3,570$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = -0,826 \equiv -47,334° \qquad \varphi' = -1,298 \equiv -74,382°$$

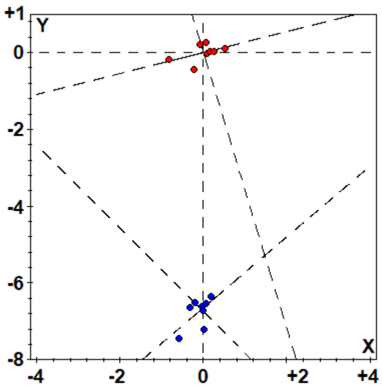
$\Rightarrow$

$$\varphi_\perp = -47,334° + 90° = +42,666° \qquad {\varphi'}_\perp = -74,382° + 90° = +15,618°$$

Die Korrelation ρ und ρ' hier nach Bravais-Pearson dazu.

$$\rho_{XY}^{BP} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} = \frac{0,402}{\sqrt{0,436 \cdot 0,984}} = 0,614$$
$$\rho'^{BP}_{XY} = \frac{C'}{\sqrt{V'_{XX} \cdot V'_{YY}}} = \frac{0,305}{\sqrt{1,089 \cdot 0,334}} = 0,506$$

Die grafische Darstellung der durchgeführten Drehung und Zentrierung der Datenpunkte. Wobei blau den originale Datensatz darstellt und rot den gedrehten und zentrierten.



Über [Dipb] ist die unzentrierte Ausgangsellipse bekannt.

$$Y = -6,748 + 0,395 \cdot (X + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (X + 0,112)^2}$$

- **Fall 1**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar. [1]

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_\perp = \tan(15,618°) = 0,280 \qquad a^2 = 0,078$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,136 \cdot 0,078 + 0,042}{1 + 0,078} = +0,049$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0,280 \cdot \frac{0,042 - 0,136}{1 + 0,078} = -0,024$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,136 \cdot 0,042}}{0,049} = +1,542 \qquad \frac{B}{A} = -\frac{0,024}{0,049} = -0,490$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = -0,490 \cdot X \pm 1,542 \cdot \sqrt{0,049 - X^2}$$

---

[1] In [Dipb] ist erklärt, dass für die Hauptachse bei $\varphi'_\perp$ gilt $f^2 > e^2$. Für die Nebenachse dementsprechend $f^2 < e^2$.

- **Fall 2**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136$$

Mit

$$a = \tan\varphi' = \tan(-74,382°) = -3,577 \qquad a^2 = 12,797$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,042 \cdot 12,797 + 0,136}{1 + 12,797} = +0,049$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -3,577 \cdot \frac{0,136 - 0,042}{1 + 12,797} = -0,024$$

Weiter wie Fall 1. [2]

- **Fall 3**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136$$

[2] Das dem so ist, lässt sich nachweisen über:

$$A_{\leftrightarrow} = \frac{e^2 \cdot a_{\leftrightarrow}^2 + f^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} \qquad A_{\updownarrow} = \frac{f^2 \cdot a_{\updownarrow}^2 + e^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$A_{\leftrightarrow} = A_{\updownarrow}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e^2 \cdot a_{\leftrightarrow}^2 + f^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = \frac{f^2 \cdot a_{\updownarrow}^2 + e^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow}^2 = \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}$$

Sowie:

$$B_{\leftrightarrow} = a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} \qquad B_{\updownarrow} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$B_{\leftrightarrow} = B_{\updownarrow}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow}^2 + \frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \cdot a_{\leftrightarrow} + 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot a_{\leftrightarrow 1;2} = -\frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \pm \frac{1}{a_{\updownarrow}} \cdot \sqrt{\left(1 + a_{\updownarrow}^2\right)^2 - 4 \cdot a_{\updownarrow}^2}$$

Mit der bekannten Bedingung $a_{\leftrightarrow}^2 = a_{\updownarrow}^{-2}$ ergibt sich vereinfacht:

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$a_{\leftrightarrow}^2 = \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} = -\frac{1}{a_{\updownarrow}}$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_\perp = \tan(15,618°) = 0,280 \qquad a^2 = 0,078$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,042 \cdot 0,078 + 0,136}{1 + 0,078} = 0,129$$

$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0,280 \cdot \frac{0,136 - 0,042}{1 + 0,078} = 0,024$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,042 \cdot 0,136}}{0,129} = 0,586 \qquad \frac{B}{A} = \frac{0,024}{0,129} = 0,186$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = 0,186 \cdot X \pm 0,586 \cdot \sqrt{0,129 - X^2}$$

- **Fall 4**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042$$

Mit

$$a = \tan \varphi' = \tan(-74,382°) = -3,577 \qquad a^2 = 12,797$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

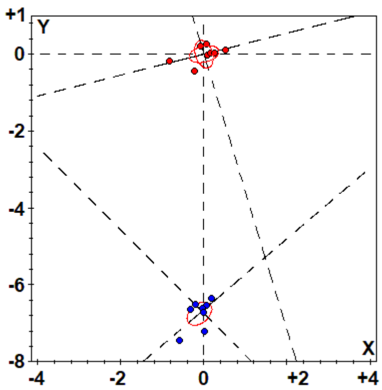
$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,136 \cdot 12,797 + 0,042}{1 + 12,797} = 0,129$$

$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -3,577 \cdot \frac{0,042 - 0,136}{1 + 12,797} = 0,024$$

Weiter wie Fall 3.

- **Ergebnisse, grafisch**

Die grafische Darstellung aller Fälle folgend dazu.



In **blau** die Werte aus **MKQ**.
In **rot** die Werte aus **MKQ - ZEN+DRE**

5 Beispiel HKA - ZEN+DRE

HKA-ZEN+DRE

Nach Messwerten in [Rol] sind in [Dipa] Datenpunkte zu einer Elliptischen Regression angegeben.

• **Beispielswerte**

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

• **Ergebnisse, numerisch**

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$X_m = \frac{\{X_i\}}{n} = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad Y_m = \frac{\{Y_i\}}{n} = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Damit sind die neuen Werte für X_i' und Y_i' und weitere berechenbar.

$$V_{XX} = \left\{(X_i - X_m)^2\right\} = 0,436133 \approx 0,436$$
$$V_{YY} = \left\{(Y_i - Y_m)^2\right\} = 0,984503 \approx 0,984$$
$$C_{XY} = C_{YX} = C = \{(X_i - X_m) \cdot (Y_i - Y_m)\} = 0,401892 \approx 0,402$$

$\Leftarrow$

i	X_i	Y_i	X'_i	Y'_i
1	+0, 192 2	-6, 340 0	-0, 413	+0, 297
2	+0, 014 9	-7, 213 8	+0, 464	+0, 134
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 235	-0, 101
4	-0, 001 9	-6, 610 3	-0, 139	+0, 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	-0, 185	+0, 140
6	-0, 008 3	-6, 662 1	-0, 088	+0, 102
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 100	-0, 211
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 697	-0, 470
8	-0, 893 3	-53, 983 5	0	0

i	$X'_i \cdot X'_1$	$Y'_i \cdot Y'_i$	$X'_i \cdot Y'_i$
1	+0, 170	+0, 088	-0, 123
2	+0, 215	+0, 018	+0, 062
3	+0, 055	+0, 010	+0, 024
4	+0, 019	+0, 012	-0, 015
5	+0, 034	+0, 020	-0, 026
6	+0, 008	+0, 010	-0, 009
7	+0, 010	+0, 044	+0, 021
8	+0, 485	+0, 220	-0, 327
8	+0, 996	+0, 422	-0, 393

Fortfahrend die zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$V'_{XX} = \left\{ {X'_i}^2 \right\} = 0,996$$
$$V'_{YY} = \left\{ {Y'_i}^2 \right\} = 0,422$$
$$C'_{XY} = C'_{YX} = C' = \{ X'_i \cdot Y'_i \} = -0,393$$

$\Rightarrow$

$$Y'_{1;2} = \pm 0,651 \cdot \sqrt{0,124 - x^2}$$

Die Winkel $\tan\varphi$ und $\tan\varphi'$ der unzentrierten und der zentrierten Ellipse im Vergleich.

$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = \frac{0,984 - 0,436}{0,402} = 1,363$$
$$\tan\varphi' = \frac{V'_{YY} - V'_{XX}}{C'} = \frac{,422 - 0,996}{-0,393} = 1,461$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = 0,938 \equiv 53,733^\circ \qquad \varphi' = 0,971 \equiv 55,610^\circ$$

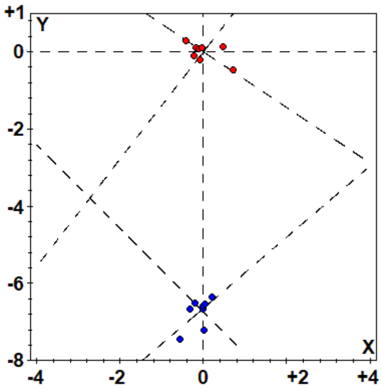
$\Rightarrow$

$$\varphi_\perp = 53,733^\circ - 90^\circ = -36,267^\circ \qquad \varphi'_\perp = 55,610^\circ - 90^\circ = -34,390^\circ$$

Die Korrelation ρ und ρ' hier nach Bravais-Pearson dazu.

$$\rho_{XY}^{BP} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} = \frac{0,402}{\sqrt{0,436 \cdot 0,984}} = +0,614$$
$$\rho'^{BP}_{XY} = \frac{C'}{\sqrt{V'_{XX} \cdot V'_{YY}}} = \frac{-0,393}{\sqrt{0,996 \cdot 0,422}} = -0,606$$

Die grafische Darstellung der durchgeführten Drehung und Zentrierung der Datenpunkte. Wobei blau den originale Datensatz darstellt und rot den gedrehten und zentrierten.



Über [Dipb] ist die unzentrierte Ausgangsellipse bekannt.

$$Y = -6,748 + 0,395 \cdot (X + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (X + 0,112)^2}$$

- **Fall 1**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar. [3]

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_{\perp} = \tan(-34,390°) = -0,684 \qquad a^2 = 0,468$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,121 \cdot 0,468 + 0,053}{1 + 0,468} = 0,075$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -0,684 \cdot \frac{0,053 - 0,121}{1 + 0,468} = 0,032$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,121 \cdot 0,053}}{0,075} = 1,068 \qquad \frac{B}{A} = \frac{0,032}{0,075} = 0,427$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = 0,427 \cdot X \pm 1,068 \cdot \sqrt{0,075 - X^2}$$

---

[3] In [Dipa] ist erklärt, dass für die Hauptkomponente bei $\varphi'_{\perp}$ gilt $f^2 > e^2$. Für die Nebenkomponente dementsprechend $f^2 < e^2$.

- **Fall 2**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121$$

Mit

$$a = \tan\varphi' = \tan(55,610°) = 1,461 \qquad a^2 = 2,135$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,053 \cdot 2,135 + 0,121}{1 + 2,135} = 0,075$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 1,461 \cdot \frac{0,121 - 0,053}{1 + 2,135} = 0,032$$

Weiter wie Fall 1. [4]

- **Fall 3**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121$$

[4] Das dem so ist, lässt sich nachweisen über:

$$A_{\leftrightarrow} = \frac{e^2 \cdot a_{\leftrightarrow}^2 + f^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} \qquad A_{\updownarrow} = \frac{f^2 \cdot a_{\updownarrow}^2 + e^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$A_{\leftrightarrow} = A_{\updownarrow}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e^2 \cdot a_{\leftrightarrow}^2 + f^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = \frac{f^2 \cdot a_{\updownarrow}^2 + e^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow}^2 = \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}$$

Sowie:

$$B_{\leftrightarrow} = a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} \qquad B_{\updownarrow} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$B_{\leftrightarrow} = B_{\updownarrow}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow}^2 + \frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \cdot a_{\leftrightarrow} + 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot a_{\leftrightarrow 1;2} = -\frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \pm \frac{1}{a_{\updownarrow}} \cdot \sqrt{\left(1 + a_{\updownarrow}^2\right)^2 - 4 \cdot a_{\updownarrow}^2}$$

Mit der bekannten Bedingung $a_{\leftrightarrow}^2 = a_{\updownarrow}^{-2}$ ergibt sich vereinfacht:

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$a_{\leftrightarrow}^2 = \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} = -\frac{1}{a_{\updownarrow}}$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_{\perp} = \tan(-34,390°) = -0,684 \qquad a^2 = 0,468$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,053 \cdot 0,468 + 0,121}{1 + 0,468} = 0,099$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -0,684 \cdot \frac{0,121 - 0,053}{1 + 0,468} = -0,032$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,053 \cdot 0,121}}{0,099} = 0,809 \qquad \frac{B}{A} = -\frac{0,032}{0,099} = -0,323$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = -0,323 \cdot X \pm 0,809 \cdot \sqrt{0,099 - X^2}$$

- **Fall 4**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053$$

Mit

$$a = \tan \varphi' = \tan(55,610°) = 1,461 \qquad a^2 = 2,135$$

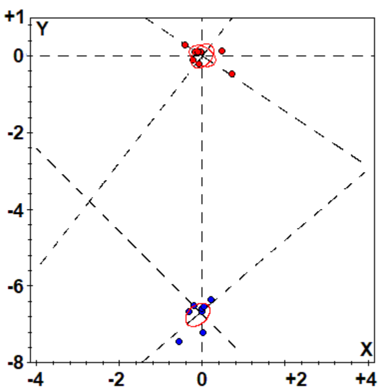
ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,121 \cdot 2,135 + 0,053}{1 + 2,135} = 0,099$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 1,461 \cdot \frac{0,053 - 0,121}{1 + 2,135} = -0,032$$

Weiter wie Fall 3.

- **Ergebnisse, grafisch**

Die grafische Darstellung aller Fälle folgend dazu.



In **blau** die Werte aus **MKQ**.
In **rot** die Werte aus **HKA - ZEN+DRE**

LaTeX 2_{ε}