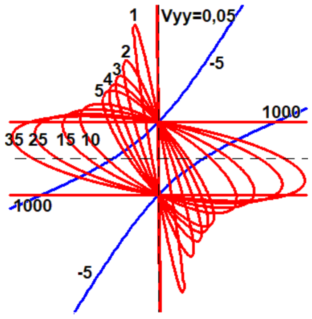
Ellipsenfunktionsgleichung - Grafische Darstellungen



Ellipse Function Equation - Graphical Representations

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 03. April 2025 – Letzte Revision: 5. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Punkte. www.Zenithpoint.de.

[Dipd] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

---

1 Fall MKQ - $Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right)$

- **Veränderliche X_m**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot (X - X_m) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - (X - X_m)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

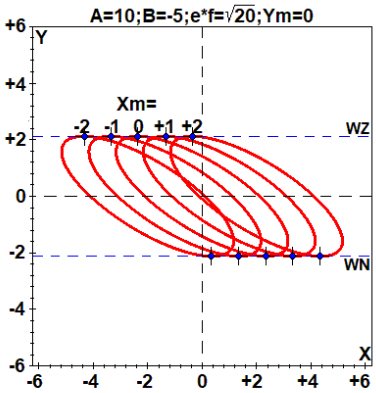
Sowie:[1]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[2] und WN[3] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2\sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{\frac{9}{2}} \approx= +2,121 \qquad y_{WN} = -\sqrt{\frac{9}{2}} \approx= -2,121$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,243$$

[1] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[2] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[3] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipb] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m;Y_m;A;B;e;f\right)=Y_m+\frac{B}{A}\cdot\left(X-X_m\right)\pm\frac{e\cdot f}{A}\cdot\sqrt{A-\left(X-X_m\right)^2}$$

Mit:

$$A=e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi \qquad B=\left(f^2-e^2\right)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

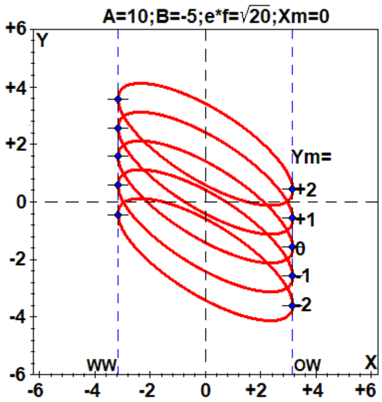
Sowie:[4]

$$A=V_{YY} \qquad B=-C \qquad e\cdot f=\frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A=10 \qquad B=-5 \qquad e\cdot f=\sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[5] und WW[6] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW}=x_{MP}+\sqrt{A} \qquad x_{WW}=x_{MP}-\sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x=x_{OW}-x_{WW}=2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW}=+\sqrt{10}\approx+3,162 \qquad x_{WW}=-\sqrt{10}\approx-3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x=x_{OW}-x_{WW}=2\sqrt{10}\approx 6,325$$

[4] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[5] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[6] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche A**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y(X_m; Y_m; A; B; e; f) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot (X - X_m) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - (X - X_m)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

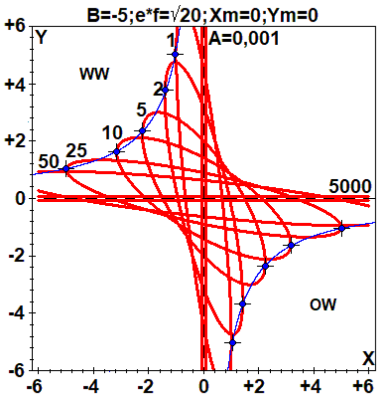
Sowie:[7]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Nur positive Werte für A sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[8] und WW[9] bilden die Umhüllende aller obiger Ellipsen ab. Es gilt:

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WW} - x_{MP}}$$

Bzw:

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{x_{OW} - x_{MP}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WW} = -\frac{5}{x_{WW}} \qquad y_{OW} = -\frac{5}{x_{OW}}$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[10] und WN[11] eine weitere Umhüllende.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + e^2 \cdot f^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WZ} - x_{MP}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WN} - x_{MP}}$$

[7] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[8] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[9] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[10] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[11] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche** B

[Dipb] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot \left(X - X_m\right) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - \left(X - X_m\right)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

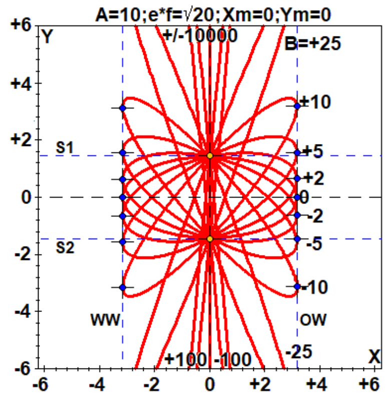
Sowie:[12]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für B sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[13] und WW[14] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \frac{e \cdot f}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[12] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[13] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[14] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche $e \cdot f$**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y\left(X_m;Y_m;A;B;e;f\right) = Y_m + \frac{B}{A}\cdot\left(X - X_m\right) \pm \frac{e\cdot f}{A}\cdot\sqrt{A - \left(X - X_m\right)^2}$$

Mit:

$$A = e^2\cdot\sin^2\varphi + f^2\cdot\cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

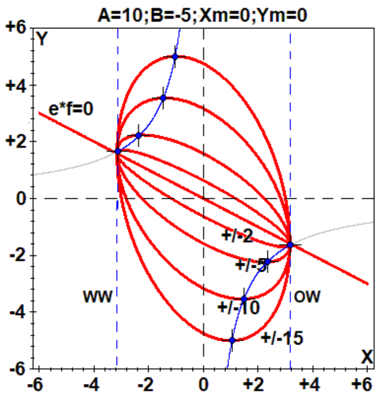
Sowie:[15]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e\cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e\cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative (nicht relevant) wie positive Werte für $e\cdot f$ sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[16] und WW[17] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[18] und WN[19] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2\cdot f^2}{A}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} + B\cdot\sqrt{\frac{A}{B^2 + e^2\cdot f^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WZ} - x_{MP}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WN} - x_{MP}}$$

Für $e\cdot f = 0$ ergibt sich eine lineare Funktion.

$$Y\left(e\cdot f = 0\right) = \underbrace{\frac{B}{A}\cdot X}_{a\cdot x} + \underbrace{Y_m - \frac{B}{A}\cdot X_m}_{b}$$

[15] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[16] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[17] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[18] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[19] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

2 Fall HKA - $Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right)$

• **Veränderliche X_m**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

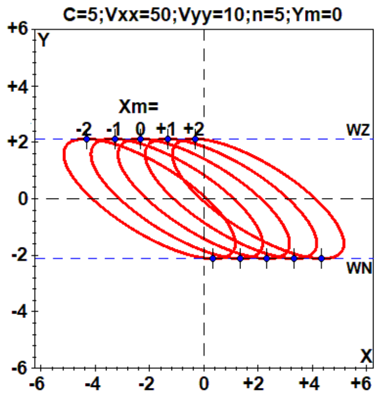
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[20]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

• **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

• **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[21] und WN[22] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2\sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{\frac{9}{2}} \approx +2,121 \qquad y_{WN} = -\sqrt{\frac{9}{2}} \approx -2,121$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,243$$

[20] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[21] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[22] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY};C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

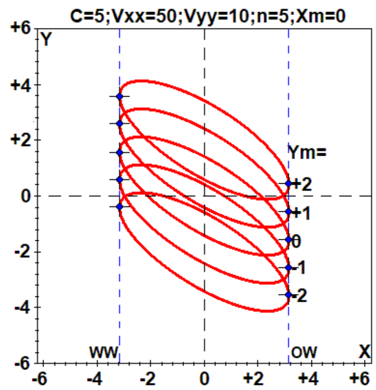
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

⇒[23]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[24] und WW[25] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

⇒

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

⇒

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

[23] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[24] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[25] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche n**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

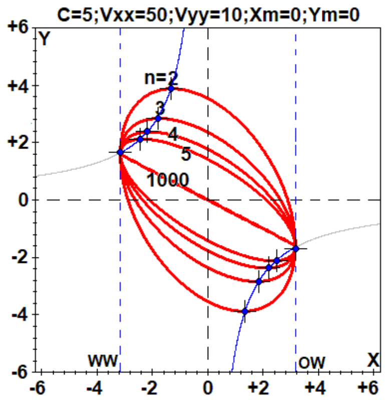
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[26]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (praktisch irrelevant)
wie positive Werte für n sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[27] und WW[28] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[29] und WN[30] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{YY} \cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY} \cdot n^2}{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WZ}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WN}}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich eine lineare Funktion.

$$Y\left(n \to \infty\right) = \underbrace{Y_m + \frac{C}{V_{YY}} \cdot X_m}_{b} + \underbrace{\frac{-C}{V_{YY}} \cdot X}_{a \cdot x}$$

[26]Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[27]OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[28]WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[29]WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[30]WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche V_{XX}**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY};C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

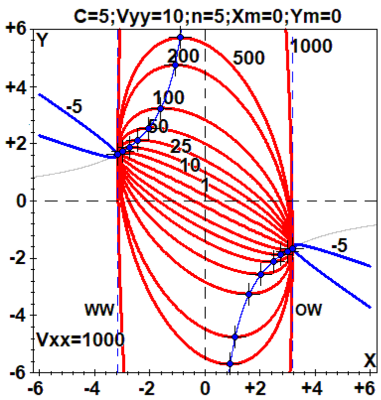
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

⇒[31]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[32] und WW[33] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

⇒

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Sowie:

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

⇒

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[34] und WN[35] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{YY} \cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY} \cdot n^2}{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

⇒

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WZ}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WN}}$$

[31] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[32] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[33] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[34] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[35] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche V_{YY}**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY};C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}}\cdot(X-X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n\cdot V_{YY}}\sqrt{V_{YY}-(X-X_m)^2}$$

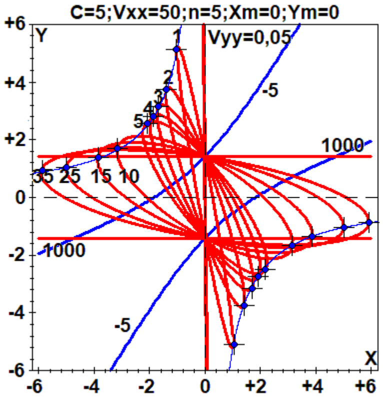
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2\cdot f^2}{V_{YY}}\cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[36]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[37] und WW[38] bilden die Umhüllende aller obiger Ellipsen ab. Es gilt:

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{C}{x_{WW}-x_{MP}}$$

Bzw:

$$y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{x_{OW}-x_{MP}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WW} = -\frac{5}{x_{WW}} \qquad y_{OW} = -\frac{5}{x_{OW}}$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[39] und WN[40] eine weitere Umhüllende.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2\cdot n^2 + V_{XX}\cdot V_{YY}}{V_{YY}\cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C\cdot\sqrt{\frac{V_{YY}\cdot n^2}{C^2\cdot n^2+V_{XX}\cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP}-x_{WZ}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP}-x_{WN}}$$

[36] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[37] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[38] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[39] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[40] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche $C_{XY} = C_{YX} = C$**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY};C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

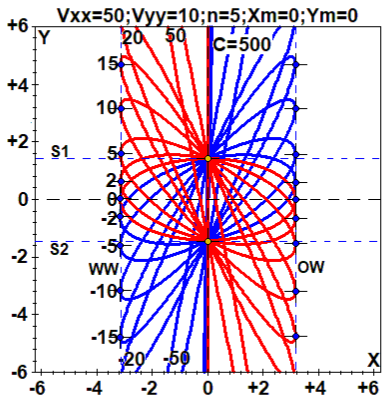
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[41]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für C sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[42] und WW[43] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \frac{1}{n}\sqrt{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[41] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[42] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[43] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

3 Fall SIG - $Y^{(\varphi=0^\circ)}(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY})$

● **Veränderliche X_m**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und ungekippten Ellipse. [Dipd]

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X-X_m)^2}{V_{XX}}}$$

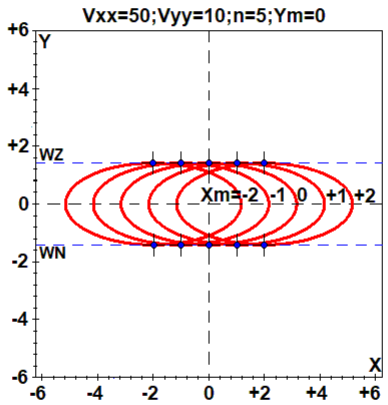
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[44 ; 45]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

● **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

● **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[46] und WN[47] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{1}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \frac{1}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{2} \approx +1,414 \qquad y_{WN} = -\sqrt{2} \approx -1,414$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,828$$

[44] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[45] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.
[46] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[47] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X-X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

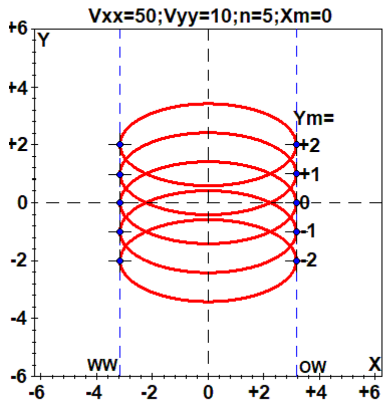
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[48 ; 49]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[50] und WW[51] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2 \cdot \sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2 \cdot \sqrt{10} \approx 6,325$$

[48] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[49] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.
[50] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[51] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche n**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=0°)}\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}\right)=Y_m\pm\sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{\left(X-X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

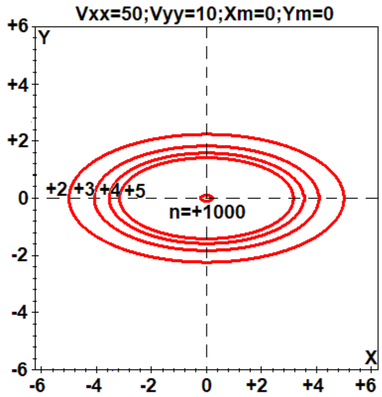
Mit:

$$V_{XX}=\frac{e^2\cdot f^2}{V_{YY}}\cdot n^2 \qquad V_{YY}=A \qquad C=-B$$

$\Rightarrow$[52 ; 53]

$$V_{XX}=50 \qquad V_{YY}=10 \qquad C=5 \qquad n=5$$

- **Beispiel**



Nur positive Werte für n sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Für die zentrierte Ellipse gilt die Funktionsgleichung:

$$Y^{(\varphi=0°)}\left(X_m=0;Y_m=0;V_{XX};V_{YY}\right)=\pm\sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{X^2}{V_{XX}}}$$

Gesucht ist der Fall, an dem die Ellipse zu einem Punkt zusammengeschmolzen ist. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n}-\frac{X^2}{V_{XX}}=0$$

$\Rightarrow$

$$X_{1;2}=\pm\sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Das ist nur dann möglich wenn $X_1=X_2=0$, was erfordert:

$$n\rightarrow\infty$$

Für die verschobene Ellipse wäre der Punkt an der Stelle $P\left(X_m;Y_m\right)$ zu beobachten. Was dann erfordert:

$$\frac{1}{n}=0$$

$\Rightarrow$

$$n\rightarrow\infty$$

[52] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[53] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche V_{XX}**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

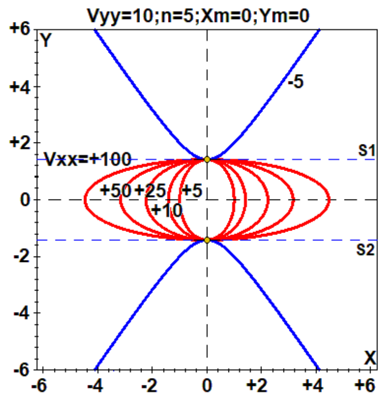
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[54 ; 55]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[54] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[55] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche V_{YY}**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=0°)}\,(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{XX}}}$$

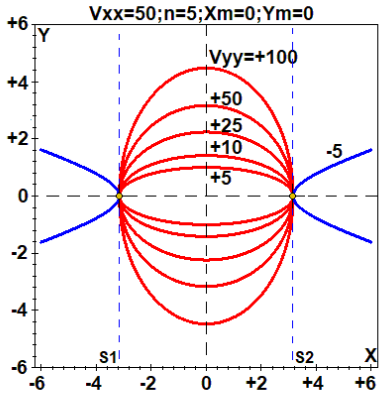
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[56 ; 57]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle, wo obere und untere Funktion zusammenstoßen $Y = Y_m$. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{XX}} = 0$$

Damit gilt:

$$S_{1;2} = X_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten.

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3,162$$

[56]Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[57]Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

4 Fall SIG - $Y^{(\varphi=90^\circ)}(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY})$

- **Veränderliche X_m**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und ungekippten Ellipse. [Dipd]

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X-X_m)^2}{V_{YY}}}$$

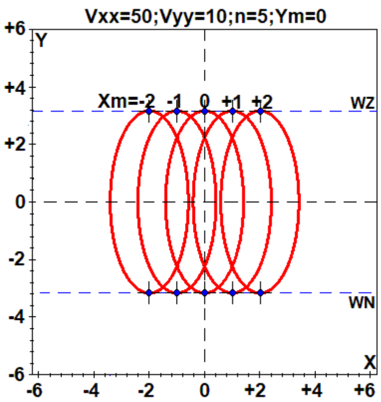
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[58 ; 59]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Der Wertebereich ist berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle $X = X_m$.

$$Y(X = X_m) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Damit gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2 \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad y_{WN} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 2 \cdot \sqrt{10} \approx 6,324$$

[58]Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[59]Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

• **Veränderliche Y_m**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{YY}}}$$

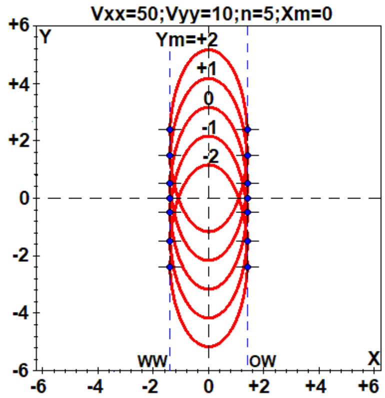
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[60 ; 61]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

• **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

• **Besondere Punkte**

Der Definitionsbereich ist berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle, wo obere und untere Funktion zusammenstoßen $Y = Y_m$. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{YY}} = 0$$

Daher:

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2 \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten.

$$x_{WW} = -\sqrt{2} \approx -1,414 \qquad x_{OW} = +\sqrt{2} \approx +1,414$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,828$$

[60]Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[61]Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

• Veränderliche n

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}(X_m;Y_m;V_{XX};V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X-X_m)^2}{V_{YY}}}$$

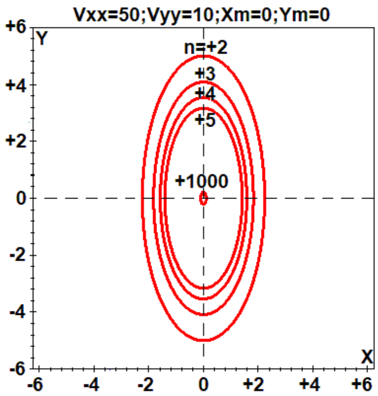
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[62 ; 63]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

• Beispiel



Nur positive Werte für n sind möglich.

• Besondere Punkte

Für die zentrierte Ellipse gilt die Funktionsgleichung:

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}(X_m=0;Y_m=0;V_{XX};V_{XX}) = \pm\sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{YY}}}$$

Gesucht ist der Fall, an dem die Ellipse zu einem Punkt zusammengeschmolzen ist. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{YY}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$X_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Das ist nur dann möglich wenn $X_1 = X_2 = 0$, was erfordert:

$$n \to \infty$$

Für die verschobene Ellipse wäre der Punkt an der Stelle $P(X_m;Y_m)$ zu beobachten. Was dann erfordert:

$$\frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$

$$n \to \infty$$

[62] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[63] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche V_{XX}**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=90°)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}}$$

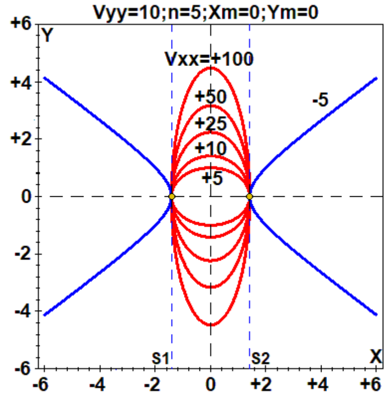
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[64 ; 65]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y^{(\varphi=90°)}\left(Y = Y_m\right)$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}} = 0$$

Daher:

$$S_{1;2} = x_{MP} \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[64] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[65] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche** V_{YY}

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=90°)}(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{YY}}}$$

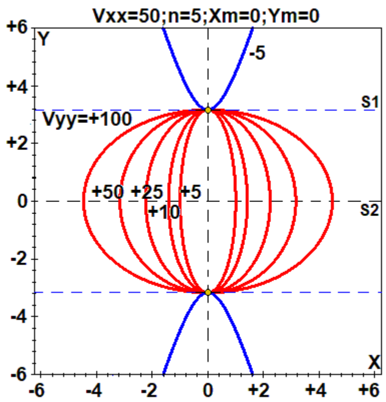
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[66 ; 67]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte** Singularwerte für:

$$Y^{(\varphi=90°)}(X = X_m) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = y_{MP} \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3,162$$

[66] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[67] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$