Synthese eines Autokorrelators

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Letzte Revision: 27. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Entwicklung eines Autokorrelators für weißes Rauschen

[001]

Für bestimmte Anwendungen sind Zahlenfolgen uneingeschränkter Zufälligkeit gefordert. Die Kontrolle dieser Bedingung ist über die Ermittlung der Autokorrelationsfunktion möglich. Ein System, welches diese Funktion ermittelt, ist ein Autokorrelator.

Ein digitales, weißes Rauschen aus unterschiedlichen Quellen soll so auf uneingeschränkter Zufälligkeit kontrolliert werden. Dazu ist folgende Funktion zu erfüllen:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int\limits_0^T x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

Anschließend wird normiert mit:

$$\rho_{xx}(\tau) = \left| \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} \right|$$

Da $\rho_{xx}(\tau)$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, ist die Autokorrelationsfunktion selbst wieder diskret darstellbar.

Beispiel anhand eines einfachen Sinussignales:

$$x(t) = \sin(t) \quad \rightarrow \quad x(t+\tau) = \sin(t+\tau)$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int\limits_0^T \sin(t) \cdot \sin(t+\tau)\, dt$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\cos(\tau)}{2} - \frac{\cos(\tau)\sin(T)\cos(T)}{2T} - \frac{\sin(\tau)\cos^2(T)}{2T} + \frac{\sin(\tau)}{2T} \right)$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \tfrac{1}{2}\cos(\tau) \quad \rightarrow \quad R_{xx}(0) = \tfrac{1}{2}$$

Für $\rho_{xx}(\tau)$ ergibt sich dann:

$$\rho_{xx}(\tau) = |\cos(\tau)|$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich ein $\rho_{xx}(0) = 1$. Die Beispielsfunktion korreliert vollendet mit sich selbst.

Bei $\tau = \pi/2$ ergibt sich ein $\rho_{xx}(\pi/2) = 0$. Die Beispielsfunktion ist vollkommen unkorreliert mit sich selbst.

2 Voraussetzungen

In Kapitel 5 wurde der Filtertyp „1“ definiert:

Typ 1: → SRI:

$$_{SRI}{}^{\text{“}}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

mit:

$$0 \leq \xi \leq +1$$

Typ 1: → SVI:

$$_{SVI}{}^{\text{“}}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1+\xi)^a \cdot y_n$$

mit:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Typ 1: → SVI:

$$_{SVI}{}^{\text{“}}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1+\xi)^a \cdot y_n$$

mit:

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right) \leq \xi \leq -1$$

Die drei Filtertypen können zusammen gefasst werden:

$${}^{\text{“}}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

mit:

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

Mittels dieser Abklinggleichung lässt sich die diskrete Funktion f(n) darstellen:

$$f(n) = (-\xi)^n \cdot y_1 + (-\xi)^{n-1} \cdot y_2 + (-\xi)^{n-2} \cdot y_3 + (-\xi)^{n-3} \cdot y_4 + \ldots + (-\xi)^1 \cdot y_n$$

$\Rightarrow$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (-\xi)^{n+1-i} \cdot y_i$$

3 Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung

Für ξ soll „1“ eingesetzt werden, so das gilt:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} \cdot y_i$$

Dann kann geschrieben werden:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(+1) \cdot y_i}_{n+1-i=even} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1) \cdot y_i}_{n+1-i=odd}$$

$\Rightarrow$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{y_i}_{n+1-i=even} - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{y_i}_{n+1-i=odd}$$

Mit $even = geradzahlig$ und $odd = ungeradzahlig$.

- **n + 1 – i = even**

$$n + 1 - i = 2, 4, 6, 8, ...$$

$\Rightarrow$

$$n - i = 1, 3, 5, 7, ...$$

$\Rightarrow$

$$i = n - 1, n - 3, n - 5, n - 7, ...$$

$\Rightarrow$

Wenn	Und	Dann gilt
n + 1 - i = even	n = even	i = odd
n + 1 - i = even	n = odd	i = even

- **n + 1 – i = odd**

$$n + 1 - i = 1, 3, 5, 7, ...$$

$\Rightarrow$

$$n - i = 0, 2, 4, 6, ...$$

$\Rightarrow$

$$i = n - 0, n - 2, n - 4, n - 6, ...$$

$\Rightarrow$

Wenn	Und	Dann gilt
n + 1 - i = odd	n = even	i = even
n + 1 - i = odd	n = odd	i = odd

Damit lassen sich 4 Fälle unterscheiden:

$f_1(n) = \sum_{i=1}^{n=even} \underbrace{y_{i=odd}}_{n+1-i=even} - \sum_{i=1}^{n=even} \underbrace{y_{i=even}}_{n+1-i=odd}$	$f_2(n) = \sum_{i=1}^{n=even} \underbrace{y_{i=even}}_{n+1-i=odd} - \sum_{i=1}^{n=even} \underbrace{y_{i=odd}}_{n+1-i=even}$
$f_3(n) = \sum_{i=1}^{n=odd} \underbrace{y_{i=even}}_{n+1-i=even} - \sum_{i=1}^{n=odd} \underbrace{y_{i=odd}}_{n+1-i=odd}$	$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n=odd} \underbrace{y_{i=odd}}_{n+1-i=odd} - \sum_{i=1}^{n=odd} \underbrace{y_{i=even}}_{n+1-i=even}$

Woraus dann folgt:

$$f_1(n) = -f_2(n) \qquad f_3(n) = -f_4(n)$$

Der arithmetische Mittelwert ist definiert:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \rightarrow \quad n \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\Rightarrow$

$f_1(n) = n_{even} \cdot (\bar{y}_{i=odd} - \bar{y}_{i=even})$	$f_2(n) = n_{even} \cdot (\bar{y}_{i=even} - \bar{y}_{i=odd})$
$f_3(n) = n_{odd} \cdot (\bar{y}_{i=even} - \bar{y}_{i=odd})$	$f_4(n) = n_{odd} \cdot (\bar{y}_{i=odd} - \bar{y}_{i=even})$

Es sind Aussagen der Mittelwertdifferenzen beschreibbar:

Voraussetzung ist eine stetige Gleichverteilung. Dies soll hier als ausreichend angesehen werden, da der Autokorrelator später weißes Rauschen prüft. Die Herleitung erfolgt mit Δx =1:

- n_{even} :

1.

$$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+...$$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+...+n_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1)$$

2.

$$1+3+5+7+9+...+(n-1)_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \frac{1}{2} \cdot n$$

3.

$$2+4+6+8+10+...+n_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{1}{2}\cdot n+1$$

Zusammen gefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = -\Delta x$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = \Delta x$$

- n_{odd} :

1.

$$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+...$$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+...+n_{odd}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{1}{2}\cdot(n+1)$$

2.

$$1+3+5+7+9+11+...+n_{odd}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \frac{n+1}{2}$$

3.

$$2+4+6+8+10+...+(n-1)_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2}+1 = \frac{n+1}{2}$$

Zusammen gefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = +0$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = -0$$

Eingetragen in die Falltabelle:

$-f_1\left(n\right) = n_{even} \cdot \Delta x$	$f_2\left(n\right) = n_{even} \cdot \Delta x$
$-f_3\left(n\right) = 0$	$f_4\left(n\right) = 0$

→ Alle ungeraden Stützstellen besitzen den Wert 0.

→ Alle geraden Stützstellen besitzen den Wert n$\cdot\Delta x$ abwechselnd im Vorzeichen.

Eine Funktion, welche diese vier Bedingungen erfüllt, ist die Cosinusfunktion. Der I- Filtertyp 1 → SRI → SVI beinhaltet als Ausgangssignal diese harmonische Funktion [1]

[1] siehe dazu auch das Arbeitsblatt: „Ermittlung der Filterübertragungsfunktionen“.

4 Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung

Eine Störung "S" wird eingeführt:

- n_{even} :

1.

$$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+...S$$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+...+n_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{1}{2}\cdot(n+1)+\frac{S}{n}$$

2.

$$1+3+5+7+9+...+(n-1)_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \left(\frac{n}{2}\right)^2+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{odd} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \frac{1}{2}\cdot n+\frac{2S}{n} = \frac{n^2+4S}{2n}$$

3.

$$2+4+6+8+10+...+n_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{1}{2}\cdot n+1+\frac{2S}{n} = \frac{n^2+2n+4S}{2n}$$

Zusammen gefasst:

$$\bar{y}_{odd}-\bar{y}^S_{even} = -\Delta x-2\cdot\frac{S}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even}-\bar{y}_{odd} = \Delta x+2\cdot\frac{S}{n}$$

Und:

$$\bar{y}^S_{odd}-\bar{y}_{even} = -\Delta x+2\cdot\frac{S}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even}-\bar{y}^S_{odd} = \Delta x-2\cdot\frac{S}{n}$$

- n_{odd} :

1.

$$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+...+S$$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+...+n_{odd}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{1}{2}\cdot(n+1)+\frac{S}{n}$$

2.

$$1+3+5+7+9+11+...+n_{odd}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{odd} = \frac{2}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \frac{(n+1)^2+4S}{2\cdot(n+1)}$$

3.

$$2+4+6+8+10+...+(n-1)_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even} = \frac{2}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2}+1+\frac{2S}{n-1} = \frac{(n-1)\cdot(n+1)+4S}{2\cdot(n-1)}$$

Zusammen gefasst:

$$\bar{y}_{odd}-\bar{y}^S_{even} = -2\cdot\frac{S}{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even}-\bar{y}_{odd} = 2\cdot\frac{S}{n-1}$$

Und:

$$\bar{y}^S_{odd}-\bar{y}_{even} = 2\cdot\frac{S}{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even}-\bar{y}^S_{odd} = -2\cdot\frac{S}{n+1}$$

Eingetragen in die Falltabelle:

$-f_1(n) = n_{even} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = n_{even} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm \frac{n_{odd}}{n_{odd}-1} \cdot 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm \frac{n_{odd}}{n_{odd}+1} \cdot 2 \cdot S$

Die Untersuchung einer stochastischen Messung erfolgt in einem begrenzten Intervall $[a; b]$, so dass gilt für die Anzahl der Stützstellen n und deren Abstände:

$$n \cdot \Delta x|_a^b = n \cdot \left. \frac{1}{n} \right|_a^b = 1$$

Um kleinste Abweichungen in der Stochastik erkennen zu können wird die Maximierung der Stützstellen angestrebt:

$$n \to \infty$$

Damit ergibt sich für $f(n)$:

$-f_1(n) = 1 \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = 1 \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm 2 \cdot S$

$\Rightarrow$

$-f_1(n) = 1 - f_3(n)$	$f_2(n) = 1 + f_4(n)$

Kontrolle, dass weiterhin gilt:

$$-f_1(n) = f_2(n)$$

$\Rightarrow$

$$1 - f_3(n) = 1 + f_4(n)$$

$\Rightarrow$

$$-f_3(n) = f_4(n)$$

Was zu zeigen war.

5 Zusammenfassung

Jede Störung der Gleichverteilung wird im Ausgangssignal (fast) unverändert erkennbar sein.

Wenn die Interpolationskonstante $(-\xi)^a$ kleiner 1 für den Einsatz optimiert gewählt wird, kommt es in der ungestörten Gleichverteilung am Ausgang des I- Filters / Autokorrelators zu einer Dämpfung des Cosinussignales bis hin zu Null bei großen Messintervallen.

Dies gilt nicht für eine Störung “S”, da diese die Voraussetzung “$y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$ massiv verletzt und somit sich als Peak aus dem Messbild abhebt.