Drehung zweier starr gekoppelter Halbkreise
–
Der Maximumpunkt und dessen Relationen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. Juli 2022 – Letzte Revision: 19. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

Literatur

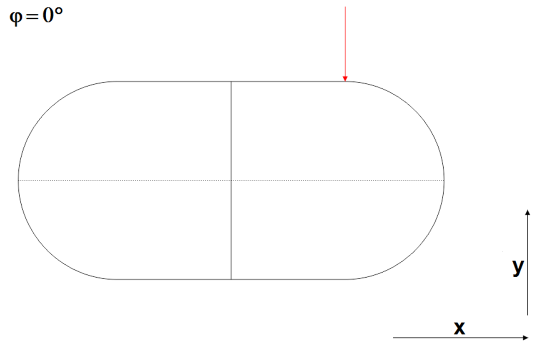
[001] Keine für vorliegenden Text.

---

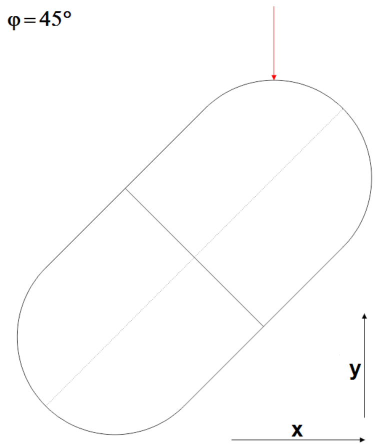
1 Einleitung

Gesucht ist die Lage des Maximums einer rundstirnigen Passfeder[1], die an den Seiten bearbeitet werden soll mittels einer drehenden Bewegung. Dabei ist die Lage technologiebedingt gemäß Grafik festgelegt. [001]

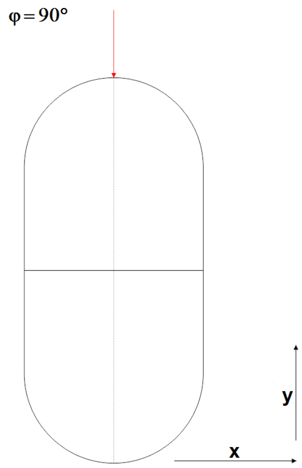
Einleitung



⇒



⇒



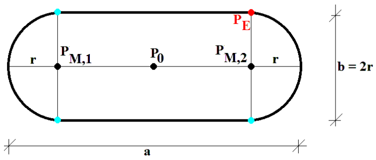
[1] nach DIN6885A (hohe Form, ohne Bohrungen)

2 Modell

Modell

Betrachtet man die Skizze genauer, ist zu sehen, dass der gesuchte Punkt immer der Maximumpunkt ist. Für vorliegendes Problem gibt es vier Extrema i.e.S. zwei Minima und zwei Maxima. Daher ist ständig eine Plausibilität durchzuführen, welche Lösung real gültig für den konkreten Fall vorliegt.

Die Halbkreise werden vorerst mathematisch als Vollkreise angesehen, dann ist das Problem leichter zu beschreiben.



P_E ist gesucht. Die anderen blau gezeichneten Punkte sind die (Neben)Lösungen.

Es folgen die Punktdefinitionen:

$$P_0\left(x_0 = 0\ ;\ y_0 = 0\right)$$

Sowie:

$$P_{M,1}\left(x_{M,1} = r - \frac{a}{2}\ ;\ y_{M.1} = 0\right) \quad \rightarrow \quad P_{M,1}\left(x_{M,1} = \frac{b-a}{2}\ ;\ y_{M.1} = 0\right)$$

$$P_{M,2}\left(x_{M,2} = \frac{a}{2} - r\ ;\ y_{M.2} = 0\right) \quad \rightarrow \quad P_{M,2}\left(x_{M,2} = \frac{a-b}{2}\ ;\ y_{M.2} = 0\right)$$

Die zugehörigen Kreisdefinitionen:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = \frac{b^2}{4}$$

$\Rightarrow$

$$y_{1;2} = y_M \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$f_{1;2}(x) = y_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2} \qquad f_{3;4}(x) = y_{3;4} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2}$$

3 Analyse

3.1 Allgemeiner Teil

3.1.1 Ungedrehtes Modell

Es wird differenziert Ungedreht

$$f'_{1;2}(x) = y'_{1;2} = \frac{b - a - 2 \cdot x}{\pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}} \qquad f'_{3;4}(x) = y'_{3;4} = \frac{a - b - 2 \cdot x}{\pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2}}$$

und Null gesetzt:

$$f'_{1;2}(x_E) = y'_{1;2} = b - a - 2 \cdot x_{E,1;2} = 0 \qquad f'_{3;4}(x_E) = y'_{3;4} = a - b - 2 \cdot x_{E,3;4} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{E,1;2} = \frac{b-a}{2} \qquad x_{E,3;4} = \frac{a-b}{2}$$

$\Rightarrow$

$$f_{E,1;2}(x_E) = y_{E,1;2} = \pm\frac{b}{2} \qquad f_{E,3;4}(x_E) = y_{E,3;4} = \pm\frac{b}{2}$$

Damit ist der Punkt P_E definiert:

$$P_E\left(x_{E,1;2;3;4}\ ;\ f_{E,1;2;3;4}(x_E)\right)$$

$\Rightarrow$

$$P_{E,1}\left(x_{E,1} = \frac{b-a}{2}\ ;\ y_{E,1} = +\frac{b}{2}\right) \qquad P_{E,2}\left(x_{E,2} = \frac{b-a}{2}\ ;\ y_{E,2} = -\frac{b}{2}\right)$$

$$P_{E,3}\left(x_{E,3} = \frac{a-b}{2}\ ;\ y_{E,3} = +\frac{b}{2}\right) \qquad P_{E,4}\left(x_{E,4} = \frac{a-b}{2}\ ;\ y_{E,4} = -\frac{b}{2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P_{E,1}\left(x_{E,1} = x_{M,1}\ ;\ y_{E,1} = +\frac{b}{2}\right) \qquad P_{E,2}\left(x_{E,2} = x_{M,1}\ ;\ y_{E,2} = -\frac{b}{2}\right)$$

$$P_{E,3}\left(x_{E,3} = x_{M,2}\ ;\ y_{E,3} = +\frac{b}{2}\right) \qquad P_{E,4}\left(x_{E,4} = x_{M,2}\ ;\ y_{E,4} = -\frac{b}{2}\right)$$

Das Extrema steht demnach immer über dem Mittelpunkt im Abstand r des berührten Kreises.

3.1.2 Gedrehtes Modell

Gedreht

Jetzt wird das Objekt gedreht.

$$\tilde{x} = x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \qquad \tilde{y} = x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$

Wobei φ der Drehwinkel ist und $\tilde{P}$ die drehtransformierten Koordinaten. Daher:

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1} = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,1} = +\frac{b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2} = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,2} = -\frac{b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3} = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,3} = +\frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4} = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,4} = -\frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1} = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,1} = +\frac{b}{2} \cdot (1 + \sin\varphi) - \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2} = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,2} = -\frac{b}{2} \cdot (1 - \sin\varphi) - \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3} = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,3} = +\frac{b}{2} \cdot (1 - \sin\varphi) + \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4} = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,4} = -\frac{b}{2} \cdot (1 + \sin\varphi) + \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1} = x_{M,1} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,1} = +r \cdot (1 + \sin\varphi) - \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2} = x_{M,1} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,2} = -r \cdot (1 - \sin\varphi) - \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3} = x_{M,2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,3} = +r \cdot (1 - \sin\varphi) + \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4} = x_{M,2} \cdot \cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,4} = -r \cdot (1 + \sin\varphi) + \frac{a}{2} \cdot \sin\varphi\right)$$

Das ist die Berechnungsgrundlage der gesuchten Lage des Extremapunktes.

Der Spezialfall dazu mit $a = 4$ und $b = 2$ für den Punkt $\tilde{P}_{E,3}$:

$$\tilde{x}_{E,3} = \cos\varphi \qquad \tilde{y}_{E,3} = 1 + \sin\varphi$$

Was bei $\varphi = 0° = 0 \cdot \pi$ dem Punkt rechts oben $P_{E,3;\varphi=0}\,(1;1)$ entspricht.

Der Abstand $P_{E,3;\varphi=0}\,(1;1)$ zu $P_0\,(0;0)$ dem Koordinatenursprung.

$$\overline{P_{E,3}P_0} = \sqrt{(\tilde{x}_{E,3})^2 + (\tilde{y}_{E,3})^2}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_{E,3}P_0} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \sin\varphi + \frac{b^2}{4}}$$

Für $\varphi = 0$:

$$\overline{P_{E,3}P_0}_{\varphi=0} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a-b)^2 + b^2}$$

Hier mit $a = 4$ und $b = 2$:

$$\overline{P_{E,3}P_0} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin\varphi}$$

3.2 Sonderfälle

3.2.1 Kreis

Kreis

$$a = 2r = b$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1} = 0\ ;\ \tilde{z}_{E,1} = -r\right)$$
$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2} = 0\ ;\ \tilde{z}_{E,2} = +r\right)$$
$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3} = 0\ ;\ \tilde{z}_{E,3} = -r\right)$$
$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4} = 0\ ;\ \tilde{z}_{E,4} = +r\right)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0} = \sqrt{0^2 + (\pm r)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0} = r = \frac{b}{2} = \frac{a}{2}$$

Bernoulli I

3.2.2 Bernoullifall $a >> b > 0$

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1} = -\frac{a}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,1} = -\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$
$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2} = -\frac{a}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,2} = -\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$
$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3} = \frac{a}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,3} = +\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$
$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4} = \frac{a}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,4} = +\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0} = \sqrt{\left(\pm\frac{a}{2}\cdot\cos\varphi\right)^2 + \left(\pm\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0} = \frac{a}{2}$$

3.2.3 Bernoullifall $b >> a > 0$

Bernoulli II

$$\tilde{P}_{E,1}\left(\tilde{x}_{E,1}=\frac{b}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,1}=+\frac{b}{2}\cdot(1+\sin\varphi)\right)$$

$$\tilde{P}_{E,2}\left(\tilde{x}_{E,2}=\frac{b}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,2}=-\frac{b}{2}\cdot(1-\sin\varphi)\right)$$

$$\tilde{P}_{E,3}\left(\tilde{x}_{E,3}=-\frac{b}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,3}=+\frac{b}{2}\cdot(1-\sin\varphi)\right)$$

$$\tilde{P}_{E,4}\left(\tilde{x}_{E,4}=-\frac{b}{2}\cdot\cos\varphi\ ;\ \tilde{y}_{E,4}=-\frac{b}{2}\cdot(1+\sin\varphi)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0}=\sqrt{\left(\pm\frac{b}{2}\cdot\cos\varphi\right)^2+\left(\pm\frac{b}{2}\cdot(1\pm\sin\varphi)\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{P_E P_0}=b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1\pm\sin\varphi}=r\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1\pm\sin\varphi}$$

Da die Forderung $b >> a$ ein $\varphi = 90°$ impliziert, gilt:

$$\overline{P_E P_0}=b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1+\sin\varphi}\qquad\rightarrow\qquad\overline{P_E P_0}=b$$

$$\overline{P_E P_0}=b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sin\varphi}\qquad\rightarrow\qquad\overline{P_E P_0}=0$$

Wobei letztere Lösung entfällt infolge der Forderung $b >> a > 0$.

3.3 Spezieller Teil

3.3.1 Weg-Zeit-Relation

WZR

Gegeben sind aus dem „Allgemeinen Teil“ die Lage des Punktes und dessen Abstand zum Koordinatenursprung:

$$x_E = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\varphi \qquad\qquad y_E = \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$L_E = \pm\sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

Der Winkel φ soll nun zeitabhängig beschrieben werden mit:

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \frac{a-b}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right) \qquad\qquad y_E = \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)$$

$\Rightarrow$

$$L_E = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b \cdot y_E}$$

$\Leftarrow$

$$x_E = x_{E;\varphi=0^\circ} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right) \qquad\qquad y_E = r + x_{E;\varphi=0^\circ} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tan\varphi^* = \frac{b + (a-b) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)}{(a-b) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)} = \frac{y_E}{x_E}$$

Das entspricht der Weg-Zeit-Relation.

Der Spezialfall dazu mit $a = 4$ und $b = 2$, sowie $n = \frac{1}{2 \cdot \pi}$:

$$x_E = \cos\left(t\right) \qquad\qquad y_E = 1 + \sin\left(t\right)$$

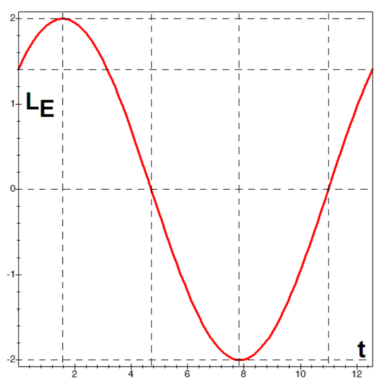
$\Rightarrow$

$$L_E = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin\left(t\right)}$$

$\Rightarrow$

$$L_E = \pm\sqrt{2 \cdot y_E}$$

$\Rightarrow$



3.3.2 Geschwindigkeit-Zeit-Relation

Die zeitlichen Ableitungen sind definiert. GZR

$$\dot{\bullet}(t) = \left(\varphi \cdot \frac{d}{dt}\right) \cdot \left(\bullet(t) \cdot \frac{d}{dt}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}\right)$$

$$\dot{y}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right) \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \frac{d}{dt}\right)$$

Im Ergebnis:

$$\dot{x}_E = -2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot (a-b) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

$$\dot{y}_E = +2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot (a-b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{L}_E = 2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot (a-b) > 0$$

$\Rightarrow$

$$a > b$$

$\Leftarrow$

$$\dot{L}_E \propto a - b$$

Der Spezialfall dazu mit $a = 4$ und $b = 2$, sowie $n = \frac{1}{2 \cdot \pi}$:

$$\dot{x}_E = -\sin(t) \qquad \dot{y}_E = +\cos(t)$$

Bei:

$$\dot{L}_E = 1$$

3.3.3 Beschleunigung-Zeit-Relation

BZR

Die zeitlichen Ableitungen sind definiert.

$$\ddot{\bullet}(t) = \left(\varphi \cdot \frac{d}{dt}\right)^2 \cdot \left(\bullet(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\right)$$

⇒

$$\ddot{x}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\right)$$

$$\ddot{y}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\right)$$

Im Ergebnis:

$$\ddot{x}_E = 8 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot (b-a) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

$$\ddot{y}_E = 8 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot (b-a) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

⇒

$$\ddot{L}_E = 8 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot (b-a)$$

⇒

$$\ddot{L}_E \propto b - a$$

Der Spezialfall dazu mit $a = 4$ und $b = 2$, sowie $n = \frac{1}{2 \cdot \pi}$:

$$\ddot{x}_E = -\cos(t) \qquad \ddot{y}_E = -\sin(t)$$

Bei:

$$\ddot{L}_E = -1$$

3.3.4 Ruck-Zeit-Relation

Die zeitlichen Ableitungen sind definiert. RZR

$$\dddot{\bullet}\,(t) = \left(\varphi \cdot \frac{d}{dt}\right)^3 \cdot \left(\bullet\,(t) \cdot \frac{d^3}{dt^3}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\dddot{x}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right) \cdot \frac{d^3}{dt^3}\right)$$

$$\dddot{y}_E = \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{d^3}{dt^3} + \frac{a-b}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right) \cdot \frac{d^3}{dt^3}\right)$$

Im Ergebnis:

$$\dddot{x}_E = -32 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot (b-a) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)$$

$$\dddot{y}_E = +32 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot (b-a) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\dddot{L}_E = \pm 32 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot (b-a)$$

$\Rightarrow$

$$\dddot{L}_E \propto= \pm\,(b-a)$$

Der Spezialfall dazu mit $a = 4$ und $b = 2$, sowie $n = \frac{1}{2 \cdot \pi}$:

$$\dddot{x}_E = +\sin(t) \qquad \dddot{y}_E = -\cos(t)$$

Bei:

$$\dddot{L}_E = \pm 1$$

LaTeX 2_ε