Die wohl umständlichste Art, bestimmte Integrale zu lösen.

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt am: 16. Mai 2012 – Letzte Revision: 20. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Problemstellung

[001]

Problemstellung

Ein bestimmtes Integral zu lösen gehört heutzutage zum Stoff höherer Lehranstalten. Jedoch ist schätzungsweise dem größeren Teil nicht so richtig klar, was man da eigentlich macht.

Was macht man denn nun beim Integrieren. Im Großen und Ganzen nichts weiter, als eine unendliche Summeformel bilden und lösen.

Es ist einem bloß nicht immer klar, dass man nur etwas zusammenzählt.

Das Wort "unendlich" erklärt schon, dass diese Sache ziemlich zeitintensiv wäre, würde man in Wirklichkeit etwas zusammen zählen, was kein Ende hat.

Aber im Prinzip macht man nichts anderes und das kann man hervorragend nutzen um ein Integral zu lösen.

2 Modell

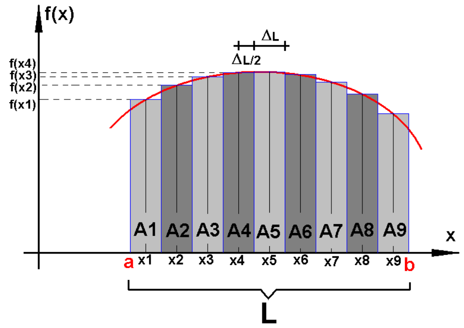

Abbildung 1: Abbild 1: Das Modell zur Aufgabe.

Gegeben ist eine Funktion mit allen Eigenschaften, die sie würdig macht integriert zu werden. Innerhalb eines Intervalls $(a; b)$ soll integriert werden. Dieses Intervall soll unterteilt werden in Teilintervalle. Die Anzahl der Teilintervalle wird festgelegt mit m. Im Bild ist zufälligerweise $m = 9$. Infolge der Unterteilung in Teilintervalle gilt für dessen Breite: Modell

$$L = b - a$$

$\Rightarrow$

$$\Delta L = \frac{b-a}{m}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{b-a}{2m}$$

In der Mitte ein jeden Teilintervalls liegt ein zugehöriger Wert x_n für diesen existiert ein Funktionswert $f(x_n)$.

Mit den Werten ΔL und $f(x_n)$ lassen sich Quadrate bilden, dessen Fläche bekannt ist.

$$A_n = f(x_n) \cdot \Delta L$$

Alle Quadrate zusammen, begrenzt vom Grafen der Funktion und der x- Achse vertikal und den Intervall- Grenzen a und b horizontal, ergibt die Gesamtfläche A:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_m$$

$\Rightarrow$

$$A = \sum_{n=1}^{m} A_n$$

$\Rightarrow$

$$A = \sum_{n=1}^{m} f(x_n) \cdot \Delta L$$

Da der Wert ΔL konstant und unabhängig von n ist, kann er vor die Summe gezogen werden.

$$A = \Delta L \cdot \sum_{n=1}^{m} f(x_n)$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} f(x_n)$$

Ein Integral ist das noch nicht, aber dann, wenn man die Summenformel endlos werden lässt. Jedoch nicht, indem man einfach $m = \infty$ setzt, sondern schön vorsichtig mit Hilfe des Grenzwertes.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{b-a}{m}\cdot\sum_{n=1}^{m} f(x_n)\right]$$

Fertig!

Das ist die allgemeine Berechnungsgrundlage für ein bestimmtes Integral.

3 Vervollständigung

Um obige Berechnungsgrundlage eines bestimmten Integral von der allgemeinsten Form etwas handhabbarer zu machen, folgende Überlegung. Vervollständigung

Zu jedem $f\left(x_n\right)$ gibt es eine Stelle x_n, dessen Stelle wohl bekannt ist. So gilt:

$$x_1 = a + \frac{\Delta L}{2}$$

$$x_2 = a + \frac{\Delta L}{2} + \Delta L$$

$$x_3 = a + \frac{\Delta L}{2} + \Delta L + \Delta L$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + \frac{\Delta L}{2} + (n-1) \cdot \Delta L = a + (2n-1) \cdot \frac{\Delta L}{2}$$

Einsetzen!

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} f\left(a + (2n-1) \cdot \frac{\Delta L}{2} \right) \right]$$

Da für $\frac{\Delta L}{2}$ ein Ausdruck bekannt ist, wird dieser auch genutzt, eingesetzt und vereinfacht.

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} f\left(a + (2n-1) \cdot \frac{b-a}{2m} \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} f\left(\frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b \right) \right]$$

Fertig!

4 Beispiele

4.1 Beispiel 1

Beispiel 1

Als einfachste lineare Funktion im Intervall $(a = 0; b = 1)$ wird gewählt:

$$y = f(x) = x$$

$\Rightarrow$

$$x = \frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 x dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 x dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right]$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

4.2 Beispiel 2

Beispiel 2

Als einfachste quadratische Funktion im Intervall $(a = -1; b = 1)$ wird gewählt:

$$y = f(x) = x^2$$

$\Rightarrow$

$$x^2 = \left(\frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b \right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{b-a}{m} \cdot \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b \right)^2 \right]$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{3 \cdot a \cdot b}{12 \cdot m^2} \cdot (b-a) + \frac{4 \cdot m^2 - 1}{12 \cdot m^2} \cdot \left(b^3 - a^3 \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

4.3 Beispiel 3

Beispiel 3

Als letztes die zweiteinfachste Exponentialfunktion im Intervall $(a = 0; b = \infty)$:

$$y = f(x) = e^{-x}$$

$\Rightarrow$

$$e^{-x} = e^{-\left(\frac{2 \cdot (m-n) + 1}{2m} \cdot a + \frac{2n-1}{2m} \cdot b \right)}$$

$\Rightarrow$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{b-a}{m}\cdot\sum_{n=1}^{m} e^{-\left(\frac{2\cdot(m-n)+1}{2m}\cdot a+\frac{2n-1}{2m}\cdot b\right)}\right]$$
$\Rightarrow$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{b-a}{m\cdot\left(e^{\frac{a}{m}}-e^{\frac{b}{m}}\right)}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{a+(1-2\cdot m)\cdot b}{m}}-e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{b+(1-2\cdot m)\cdot a}{m}}\right)\right]$$
$\Rightarrow$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = e^{-(a+b)}\cdot\left(e^{b}-e^{a}\right)$$
$\Rightarrow$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} e^{-b}\cdot\left(e^{b}-1\right)$$
$\Rightarrow$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 1$$
In der Hoffnung, alle Klarheiten beseitigt zu haben - Ende!

LaTeX