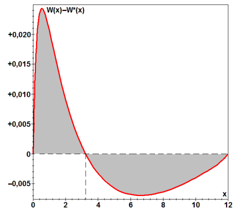
Die Teilapproximation der



positiven oberen Lambert W-Funktion

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 25. Oktober 2024 - Letzte Revision: 29. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Grundfunktion $W^*(x)$

Gegeben ist die Funktion [001]

$$W(x)$$

die Lambert W-Funktion, speziell hier im ersten Quadranten. Daher:

$$x \geq 0$$

Gesucht ist ein einfacher analytischer Ausdruck, welcher die Werte der Lambert W-Funktion im genannten Intervall hinreichend approximiert. Da für große x-Werte bereits Lösungen existieren, wird vorliegen folgende Einschränkung festgelegt.

$$0 \leq x \leq 12$$

Aus dem Wesen der Lambert W-Funktion ist zu vermuten, dass die Funktion $W^*(x)$ mit den enthaltenden Koeffizienten a und b

$$W^*(x) = a \cdot \ln(b \cdot x + 1)$$

die Lambert W-Funktion genügend genau nachbilden kann. Im Folgendem soll a und b definiert werden.

2 Koeffizienten a und b

2.1 Definition

Gesucht ist das Flächenintegral.

$$\int W(m) = \int_0^m W(x) \cdot \mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad 0 < m \leq 12$$

Ebenfalls das Flächenintegral der Ersatzfunktion, für das es eine analytische Lösung gibt.

$$\int W^*(m) = a \cdot \int_0^m \ln(b \cdot x + 1) \cdot \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$\int W^*(m) = \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Die Minimalfläche F_{MIN} beider Integrale wird benötigt,

$$F_{MIN} = \int W(m) - \int W^*(m) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = \int W(m) - \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Damit ist a definiert.

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

Der Wert für b kann ermittelt werden mit der Forderung, dass F_{MIN} abgeschlossen ist, also gilt.

$$W(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad W^*(0) = 0$$

Diese Forderung „links am Rande" des betrachteten Intervalls ist „von Hause aus" immer erfüllt. Bleibt der rechte Intervallrand. Für die Forderung

$$W(m) = W^*(m)$$

$\Rightarrow$

$$W(m) = a \cdot \ln(b \cdot m + 1)$$

gilt also

$$W(m) = \frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} = \frac{W(m)}{\int W(m)}$$

Damit ist b definiert, da obige Gleichung Lösungen liefert.

2.2 Berechnung

Das Berechnen der konkreten Werte von a und b ist trivial. Zuerst der Term

$$\frac{W(m)}{\int W(m)}$$

$\Rightarrow$

m	$W(m)$	$\frac{1}{\int W(m)}$	$\frac{W(m)}{\int W(m)}$
1	0,567	3,027	1,717
2	0,853	0,952	0,811
3	1,050	0,498	0,523
4	1,202	0,319	0,383
5	1,327	0,227	0,301
6	1,432	0,173	0,248
7	1,524	0,138	0,210
8	1,605	0,113	0,182
9	1,679	0,095	0,160
10	1,746	0,082	0,143
11	1,807	0,072	0,129
12	1,863	0,063	0,118

Damit ist im linken Term der Wert b ermittelbar.

m	b
1	1,737
2	1,618
3	1,541
4	1,485
5	1,440
6	1,403
7	1,372
8	1,345
9	1,322
10	1,300
11	1,282
12	1,264

Für $b = 1,403$ wird festgelegt:

$$b_{m=6} \approx \sqrt{2}$$

Für a folgt dann:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot 6 + 1\right) + \ln\left(\sqrt{2} \cdot 6 + 1\right) - \sqrt{2} \cdot 6} \cdot 5,783188774 = 0,636$$

$\Rightarrow$

$$a_{m=6} \approx \frac{2}{\pi}$$

Was letztendlich zu $W^*(x)$ führt:

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot x + 1\right)$$

Informativ folgend, die Werte von a in Abhängigkeit von m und b.

m	b	a
1	1,737	0,563
2	1,618	0,591
3	1,541	0,608
4	1,485	0,621
5	1,440	0,631
6	1,403	0,636
7	1,372	0,646
8	1,345	0,652
9	1,322	0,657
10	1,300	0,661
11	1,282	0,665
12	1,264	0,670

Für $m = 12$ ergibt sich dann ein $W^*(x)$ von:

$$W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1\right)$$

Die Wahl von m entscheidet über den Approximationsfehler im Intervall $0 \leq x \leq m$.

3 Anhang

3.1 Zusammenfassung

• Approximation

Gegeben ist die Lambert W-Funktion $W(x)$, die durch eine Ersatzfunktion $W^*(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 12$ approximiert wird. Zur Optimierung des Ergebnisses kann das maximal zur Verfügung stehende Intervall eingeschränkt werden mit Hilfe der oberen Intervallschranke $0 < m \leq 12$.

Damit ergibt sich die Approximationsfunktion

$$W^*(x)_m = a(m) \cdot \ln(b(m) \cdot x + 1)$$

mit den von m abhängigen Koeffizienten a und b. Nutzbare Werte sind im Abschnitt „Berechnung" aufgeführt. Für $m = 6$ und $m = 12$ sind zwei spezielle $W^*(x)$ aufgezeigt.

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot x + 1\right) \qquad W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1\right)$$

• Derivate

Aus den Berechnungsgrundlagen für a und b folgt:

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$$W(m) = \ln(b \cdot m + 1) \cdot \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot \ln(b \cdot m + 1) = W(m)$$

Mit der Definition von m gilt dann auch die Allgemeingültigkeit für x.

Ein spezieller Punkt ist bekannt:

$$W\left(e^1\right) = 1 \qquad W^*\left(e^1\right)_{m=6} = 1{,}004451\ldots \qquad W^*\left(e^1\right)_{m=12} = 1{,}057623\ldots$$

Für $x = 1$ lässt sich über die Lambert W-Funktion die Omegakonstante ermitteln:

$$W(1) = 0{,}56714329\ldots \quad W^*(1)_{m=6} = 0{,}56109985\ldots \quad W^*(1)_{m=12} = 0{,}54653196\ldots$$

Die erste Ableitung:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x \cdot (1 + W(x))} \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \qquad W^{*\prime}(x) = \frac{a \cdot b}{b \cdot x + 1}$$

Die zweite Ableitung:

$$W''(x) = -\frac{W^2(x)}{x^2 \cdot (1 + W(x))^3} \cdot (W(x) + 2) \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \qquad W^{*\prime\prime}(x) = -\frac{a \cdot b^2}{(b \cdot x + 1)^2}$$

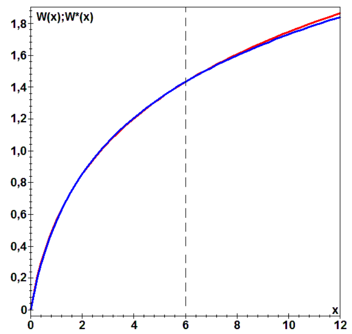
Ein spezielles Integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{W(x)}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{8\pi} \approx 5{,}01326$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=6}}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x \approx 4{,}75683 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=12}}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x \approx 4{,}72752$$

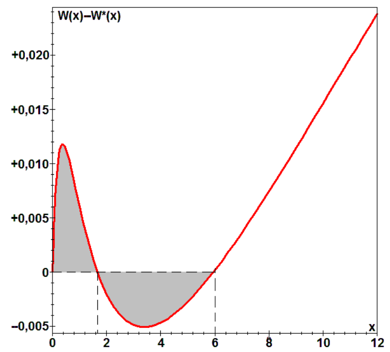
3.2 Grafische Darstellungen

- Funktion $W(x)$ und $W^*(x)_{m=6}$



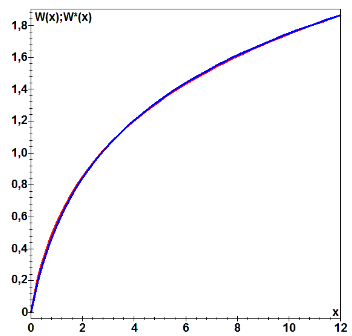
Darstellung von $W(x)$ und $W^*(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

- Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=6}$



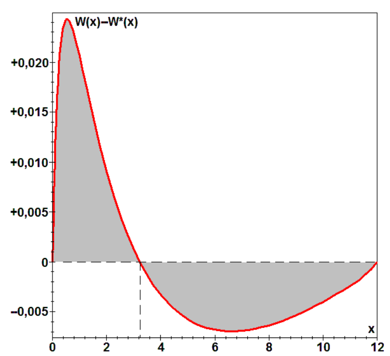
Die Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.
Grau eingezeichnet die Minimalfläche F_{MIN} für $m = 6$.

- Funktion $W(x)$ und $W^*(x)_{m=12}$



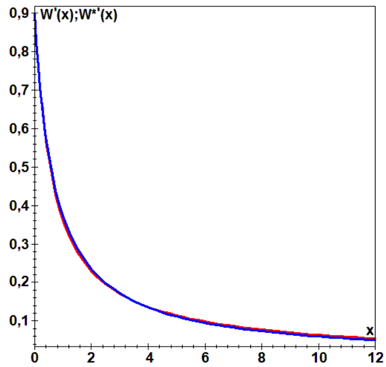
Darstellung von $W(x)$ und $W^*(x)_{m=12}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

- Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=12}$



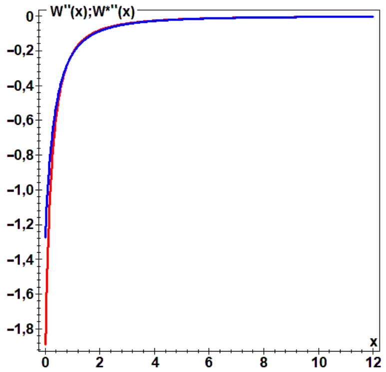
Die Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=12}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.
Grau eingezeichnet die Minimalfläche F_{MIN} für $m = 12$.

• Erste Ableitung



Darstellung von $W'(x)$ und $W^{*\prime}(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

• Zweite Ableitung



Darstellung von $W''(x)$ und $W^{*\prime\prime}(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$