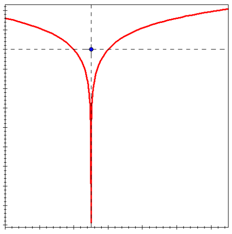
Die Regression der Hill-Funktion



The regression of the Hill function

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 30. Oktober 2024 - Letzte Revision: 20. November 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression, Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

[F.] F. Piva; M. Grigoletto; R. Brescancin; C. De Santi; M. Buffolo; J. Ruschel; J. Glaab; D. Hauer Vidal; M. Guttmann; J. Rass; S. Einfeldt; N. Susilo; T. Wernicke; M. Kneissl; G. Meneghesso; E. Zanoni; M. Meneghini. Impact of Mg-doping on the performance and degradation of AlGaN-based UV-C LEDs. https://doi.org/10.1063/5.0142054 Appl. Phys. Lett. 122, 151108 (2023).

1 Einleitung

Gegeben ist eine speziell zusammengesetzte Funktion H, die in der Literatur gewöhnlich als nach dessen Erstbeschreiber Archibald Hill „Hill's formula“ genannt wird. Je nach Anwendungsgebiet, das diese Funktion nutzt, existieren verschiedene Schreibweisen, auch in der Anzahl voneinander unabhängiger Koeffizienten, gibt es je nach Anwendungsfall Unterschiede. Im vorliegenden Fall wird als Hill-Funktion folgende Berechnungsgrundlage benannt: [001]

$$H\left(x\right) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}}$$

Gesucht ist eine Berechnungsmöglichkeit der Koeffizienten a, b, c und d für vorliegende Datenpunkte $P_i\left(x_i; H^{*0}\left(x_i\right)\right)$. Diese Aufgabe teilt sich in zwei Schritte auf. Zuerst die Umwandlung der Hill-Funktion in eine regressionsfähige Form, danach die eigentliche Regression selbst.

Wie bei jeder Regression erforderlich, funktioniert folgendes vorangehen nur, wenn vorliegende Daten sicher „Hill-verteilt“ sind. Ebenso muss der volle Definitionsbereich ausgenutzt sein, da sonst die unweigerlichen Regressionsfehler die Ergebnisse unbrauchbar gestalten.

Im Hinblick auf eine nötige Vorabschätzung des Koeffizienten c, ist eine „langgezogene“ Datensatzbreite von Vorteil.

Vorliegendes Skript ist ein Arbeitsblatt und entbehrt daher jeder Vollständigkeit und kann unter gegebenen Umständen von mathematischen Vorgaben abweichen. Typografische Fehlerfreiheit im Bereich der Möglichkeiten.

2 Herleitungen

2.1 Derivatbildung von $H(x)$

Definiert werden acht Derivate von $H(x)$ durch schrittweises Umstellen.

$$\begin{aligned}
H^{*0}(x) &= H(x)\\
H^{*1}(x) &= 1 - H^{*0}(x)\\
H^{*2}(x) &= H^{*1}(x)^{-1}\\
H^{*3}(x) &= H^{*2}(x)\cdot(1-a)\\
H^{*4}(x) &= H^{*3}(x) - 1\\
H^{*5}(x) &= H^{*4}(x)^{-1}\\
H^{*6}(x) &= H^{*5}(x)\cdot b\\
H^{*7}(x) &= \ln H^{*6}(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
H^{*0}(x) &= 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}}\\
H^{*1}(x) &= \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}}\\
H^{*2}(x) &= \frac{1+\frac{b}{(x+c)^d}}{1-a}\\
H^{*3}(x) &= 1 + \frac{b}{(x+c)^d}\\
H^{*4}(x) &= \frac{b}{(x+c)^d}\\
H^{*5}(x) &= \frac{(x+c)^d}{b}\\
H^{*6}(x) &= (x+c)^d\\
H^{*7}(x) &= d\cdot\ln(x+c)
\end{aligned}$$

Ein Zusammenhang zwischen $H^{*7}(x)$ und $H^{*0}(x)$ ist bekannt.

$$H^{*7}(x) = \ln b - \ln\left(\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1\right) = \ln b - \ln\frac{H^{*0}(x)-a}{1-H^{*0}(x)} = \ln\left(\frac{1-H^{*0}(x)}{H^{*0}(x)-a}\cdot b\right)$$

Um $H^{*7}(x)$ berechnen zu können, ist die Ermittlung der Koeffizienten a und b nötig.

2.2 Schätzung der Koeffizienten a und b

• Berechnung von a[1]

Bekannt sind $H^{*2}(x)$ und $H^{*3}(x)$.

$$H^{*2}(x) = \frac{1+\frac{b}{(x+c)^d}}{1-a} \qquad\qquad H^{*3}(x) = 1 + \frac{b}{(x+c)^d}$$

Damit kann der Koeffizient a definiert werden.

$$\frac{H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)} = 1 - a$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{H^{*2}(x) - H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)}$$

Problem, der Wert $H^{*3}(x)$ ist anfänglich unbekannt. Jedoch besagt der Grenzwert:

$$\lim_{x\to\pm\infty} H^{*3}(x) = 1$$

$\Rightarrow$

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)}$$

Der Koeffizient kann mit einem konkreten Randwert von $H^{*2}(x)$ abgeschätzt werden.[2]

$$H^{*2}(x) = \frac{1}{1 - H^{*0}(x)}$$

• Abschätzung von b[3]

Die erste Möglichkeit b zu berechnen bietet $H^{*4}(x)$. So gilt:

$$H^{*4}(x) \cdot (x+c)^d = b$$

Mit:

$$(x+c)^d = 1$$

$\Rightarrow$

$$x = \pm 1 \pm c$$

Dann:

$$b = H^{*4}(x = \pm 1 \pm c)$$

Problem, die Stelle $x = \pm 1 \pm c$ ist unbekannt. Abhilfe schafft hier nur für alle $H^{*4}(x)$ das dazugehörige b zu berechnen, um anschließend mit $H^{*6}(x) = 1$ das Ergebnis zu verifizieren.

$$H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1-a) - 1 = \frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1$$

Sowie:

$$H^{*6}(x) = \frac{b}{H^{*4}(x)} = \frac{b}{H^{*2}(x)\cdot(1-a) - 1} = \frac{b}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1}$$

[1] Der Koeffizient a bestimmt den Wertebereich der Hillfunktion. So gilt für absteigende y-Werte $1 > H(x) > c$ und für aufsteigende y-Werte $c > H(x) > 1$. Daher kann a im konkreten praktischen Fall oftmals ohne Berechnung abgeschätzt werden.

[2] Reicht die Datenlage nicht aus, ein nutzfähiges a zu ermitteln, dann kann aus dem konkreten Anwendungsfall der Koeffizient festgelegt werden. Siehe Beispiel II - Alterung einer UVC-LED. Die untere Grenze dieser LED kann mit $a = 0$, keine Leistungsabgabe, dann legitim angenommen werden.

[3] Final im nachfolgenden Abschnitt.

2.3 Regression der Koeffizienten c und d

An der Stelle $x = c$ befindet sich ein Extrema. Nach Ermittlung von H^{*7} muss ggf. der Datensatz am Extrema getrennt werden. Der Datensatz links und rechts ergeben die gleichen Koeffizienten c und d, da beide Teildatensätze symmetrisch sind.

Zuerst wird der Koeffizient d ermittelt.

• Berechnung von d

Bei genauer Betrachtung von $H^{*7}(x)$ ergibt sich:

$$d = \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)} = \frac{d \cdot \ln(x_i + c)}{\ln(x_i + c)}$$

Der Koeffizient c ist bekannt, jedoch bedingt durch die Art der Ermittlung eine Näherung. Ebenso H^{*7}. Daher wird obige Berechnungsgrundlage nur in unmittelbarer Nähe zu c exakt sein. Daher gilt einschränkend für diese Berechnung:

$$d(x_i \to -c) \approx \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)}$$

Um den Koeffizienten d näher zu berechnen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine lineare Regression der Form $y = m \cdot x + n$ liefert dann $d = m$, wobei für die Inhomogenität $n \approx 0$ gelten sollte [4]. Eine Abweichung von Null kann für eine Interpretation der Messdatenqualität herangezogen werden. Wird auf die Inhomogenität verzichtet, lässt sich d vereinfacht berechnen über:

$$d = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2}$$

Wobei:

$$X_i = \ln(x_i + c) \qquad Y_i = \ln H^{*6}(x) = H^{*7}(x)$$

$\Rightarrow$

$$d_i = \frac{X_i \cdot Y_i}{X_i^2} = \frac{\ln(x_i + c) \cdot d \cdot \ln(x_i + c)}{\ln^2(x_i + c)}$$

• Berechnung von c[5]

Aus der Berechnungsgrundlage für d lässt sich feststellen, dass um der vermuteten Stelle von c gilt:

$$H^{*6}(x_i) = (x_i + c)^d$$

$\Rightarrow$

$$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$$

Was den Koeffizienten c letztendlich fixiert.

• Berechnung von b

Da die Koeffizienten a, c und d bekannt sind, kann die Abschätzung von b konkretisiert werden über:

$$H^{*0}(x) = 1 - \frac{1 - a}{1 + \frac{b}{(x+c)^d}}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{H^{*0}(x) - a}{1 - H^{*0}(x)} \cdot (x + c)^d$$

[4]Ergibt sich aus der Vorschrift der Linearen Regression $y = m \cdot x + n$ nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ. So gilt für den Anstieg m und der Inhomogenität n für zwei Punkte $i = 2$, welche y eindeutig festlegen:

$$m = \frac{2 \cdot \{X \cdot Y\} - \{X\} \cdot \{Y\}}{2 \cdot \{X^2\} - \{X\}^2} = \frac{X \cdot Y}{X^2} \qquad n = \frac{\{X^2\} \cdot \{Y\} - \{X \cdot Y\} \cdot \{X\}}{2 \cdot \{X^2\} - \{X\}^2} = 0$$

[5]Der Koeffizient c bestimmt den Abstand zur Ordinate. Daher kann c oftmals für den konkreten praktischen Fall ohne Berechnung abgeschätzt werden.

2.4 Sonderfälle der Hill-Funktion

• **Sonderfall** $a = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 1$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=1) = 1$$

• **Sonderfall** $a = 0$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=0) = \frac{b}{(x+c)^d + b}$$

• **Sonderfall** $b = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $b = 1$.

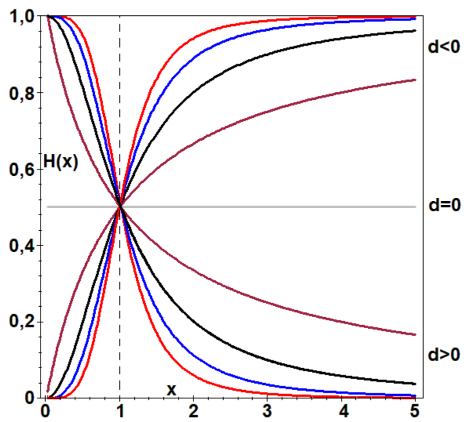
$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, b=1) = \frac{a \cdot (x+c)^d + 1}{(x+c)^d + 1}$$

• **Sonderfall** $a = 0$ **und** $b = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 0$ und $b = 1$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=0, b=1) = \frac{1}{(x+c)^d + 1}$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Sonderfalles $x \neq 0$, $a = 0$ und $b = 1$,
sowie $c = 0$ mit den ausgewählten Werten für den Koeffizient d.
Mit $d = \pm 4$, $d = \pm 3$, $d = \pm 2$, $d = \pm 1$ und $d = 0$.

• **Sonderfall** $d = 0$ **und** $x + c \neq 0$

Gegeben ist der Sonderfall $d = 0$ und $x + c \neq 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, d=0) = \frac{a+b}{1+b}$$

• **Sonderfall** $d = 0$**,** $a = 0$**,** $b = 1$ **und** $x + c \neq 0$

Gegeben ist der Sonderfall $d = 0$, $a = 0$, $b = 1$ und $x + c \neq 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, d=0) = \frac{1}{2}$$

3 Zusammenfassung

• Ermittlung des Koeffizienten a

$$a = \frac{H^{*2}(x) - H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)}$$

$\Rightarrow$

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)}$$

Der Koeffizient kann mit einem konkreten Randwert von $H^{*2}(x)$ abgeschätzt werden.[6,7]

• Abschätzung des Koeffizienten b

$$b = H^{*4}(x = \pm 1 \pm c)$$

Für alle $H^{*4}(x)$ ist das dazugehörige b zu berechnen und anschließend mit $H^{*6}(x) = 1$ verifizieren.

$$H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1 - a) - 1 = \frac{1 - a}{1 - H^{*0}(x)} - 1$$

Sowie:

$$H^{*6}(x) = \frac{b}{H^{*4}(x)} = \frac{b}{H^{*2}(x) \cdot (1 - a) - 1} = \frac{b}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1}$$

• Ermittlung des Koeffizienten d

Zuerst wird der Koeffizient d ermittelt, danach c

Über einen Messpunkt in Nähe von $-c$[8] kann der Koeffizient d abgeschätzt werden.

$$d(x_i \to -c) \approx \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)}$$

Um den Koeffizienten d zu berechnen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine lineare Regression der Form $y = m \cdot x + n$ liefert dann $d = m$, wobei für die Inhomogenität $n \approx 0$ gelten sollte[9]. Eine Abweichung von Null kann für eine Interpretation der Messdatenqualität herangezogen werden. Wird auf die Inhomogenität verzichtet, lässt sich d vereinfacht berechnen über:

$$d = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2}$$

Wobei:

$$X_i = \ln(x_i + c) \qquad Y_i = \ln H^{*6}(x) = H^{*7}(x)$$

• Ermittlung des Koeffizienten c[10]

Aus der Berechnungsgrundlage für d lässt sich feststellen, dass um der vermuteten Stelle von c gilt:

$$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$$

Was den Koeffizienten c letztendlich fixiert.

• Berechnung von b

Final über:

$$b = \frac{H^{*0}(x) - a}{1 - H^{*0}(x)} \cdot (x + c)^d$$

[6] Reicht die Datenlage nicht aus, ein nutzfähiges a zu ermitteln, dann kann aus dem konkreten Anwendungsfall der Koeffizient festgelegt werden. Siehe Beispiel II - Alterung einer UVC-LED. Die untere Grenze dieser LED kann mit $a = 0$, keine Leistungsabgabe, dann legitim angenommen werden.

[7] Der Koeffizient a bestimmt den Wertebereich der Hillfunktion. So gilt für absteigende y-Werte $1 > H(x) > c$ und für aufsteigende y-Werte $c > H(x) > 1$. Daher kann a im konkreten praktischen Fall oftmals ohne Berechnung abgeschätzt werden.

[8] hier als Vermutung aus der Datenlage

[9] Diese Art der Berechnung von d ist anzustreben, da mit der Kontrolle über die Inhomogenität eine Abschätzung der Regressionsqualität möglich ist.

[10] Der Koeffizient c bestimmt den Abstand zur Ordinate. Daher kann c oftmals für den konkreten praktischen Fall ohne Berechnung abgeschätzt werden.

4 Anhang

4.1 Beispiele

4.1.1 Beispiel I

Gegeben sind Messwertpunkte $P_i\left(x_i; H^{*0}(x)\right)$. Es wird vermutet, dass sich diese Datenpaare durch die Hill-Funktion beschreiben lassen.

• **Ermittlung gebrauchter Derivate** $H^{*2}(x_i)$ **und** $H^{*4}(x_i)$

$$H^{*2}(x) = \frac{1}{1 - H^{*0}(x)} \qquad H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1 - a)$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	-2,9	+0,985	+66,667	+390,002
2	-1,8	-0,588	+0,630	+3,686
3	-0,7	-2,417	+0,293	+1,714
4	+0,4	-3,456	+0,224	+1,310
5	+1,5	-4,010	+0,200	+1,170
6	+2,5	-4,299	+0,189	+1,106
7	+3,5	-4,481	+0,182	+1,065
8	+5,5	-4,685	+0,176	+1,030
9	+7,5	-4,790	+0,173	+1,012
10	+9,0	-4,838	+0,171	+1,000

• **Ermittlung von** a

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)} = \frac{0,171 - 1}{0,171} = -4,85$$

• **Abschätzung von** b

$$c_{\text{vermutet}} = 3$$

$\Rightarrow$

$$b_{\text{vermutet}} \approx H^{*4}(x = \pm 1 \pm c) = H^{*4}(-4; -2; +2; +4) = \varnothing; +3,90; +1,15; +1,05$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} b_1 &= b(-4) = \varnothing \\ b_2 &= b(-2) = +3,90 \\ b_3 &= b(+2) = +1,15 \\ b_4 &= b(+4) = +1,05 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$H^{*6}(-2) \stackrel{?}{=} 1$$

$$H^{*6}(+2) \stackrel{?}{=} 1$$

$$H^{*6}(+4) \stackrel{?}{=} 1$$

• **Verifizierung der Abschätzung über** $b = H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$ **und** $H^{*6}(x_i) = 1$

$$H^{*6}(x_i) = \frac{b(\bullet)}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x_i)} - 1}$$

$\Rightarrow$

$b_2 = +3,90$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,010	b_2 = +3,900
2	-1,8	+3,686	+1,453	+5,356
3	-0,7	+1,714	+5,477	+9,388
4	+0,4	+1,310	+12,467	+16,332
5	+1,5	+1,170	+23,261	+27,215
6	+2,5	+1,106	+37,506	+41,482
7	+3,5	+1,065	+57,929	+61,694
8	+5,5	+1,030	+134,373	+138,404
9	+7,5	+1,012	+376,350	+380,866
10	+9,0	+1,000	+1897,350	+1897,350

$b_3 = +1,15$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,003	b_3 = +1,170
2	-1,8	+3,686	+0,428	+1,578
3	-0,7	+1,714	+1,615	+2,768
4	+0,4	+1,310	+3,676	+4,816
5	+1,5	+1,170	+6,859	+8,025
6	+2,5	+1,106	+11,060	+12,232
7	+3,5	+1,065	+17,082	+18,192
8	+5,5	+1,030	+39,623	+40,812
9	+7,5	+1,012	+110,975	+112,307
10	+9,0	+1,000	+559,475	+559,475

$b_4 = +1,05$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,003	b_4 = 1,050
2	-1,8	+3,686	+0,391	+1,441
3	-0,7	+1,714	+1,475	+2,528
4	+0,4	+1,310	+3,356	+4,396
5	+1,5	+1,170	+6,262	+7,326
6	+2,5	+1,106	+10,098	+11,168
7	+3,5	+1,065	+15,596	+16,610
8	+5,5	+1,030	+36,177	+37,262
9	+7,5	+1,012	+101,325	+102,541
10	+9,0	+1,000	+510,825	+510,825

Erfüllt ist nur:

$$H^{*6}(-2) = 1$$

$\Rightarrow$

$$b \approx +3,90$$

• **Ermittlung von** d

$$Y_i = H^{*7}(x_i) = \ln H^{*6}(x_i) \qquad X_i = \ln(x_i + c)$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	-2,9	-2,303	+0,010	-4,605	+1,999
2	-1,8	+0,182	+1,453	+0,374	+2,055
3	-0,7	+0,833	+5,477	+1,701	+2,042
4	+0,4	+1,224	+12,467	+2,523	+2,061
5	+1,5	+1,504	+23,261	+3,147	+2,092
6	+2,5	+1,705	+37,506	+3,624	+2,126
7	+3,5	+1,872	+57,929	+4,059	+2,168
8	+5,5	+2,140	+134,73	+4,901	+2,290
9	+7,5	+2,351	+376,50	+5,931	+2,523
10	+9,0	+2,485	+1897,50	+7,548	+3,037
Σ	-	-	-	-	+22,393

Über einen Messpunkt in Nähe von $-c_{\text{vermutet}}$ kann der Koeffizient d abgeschätzt werden, da dort gilt:

$$d(x_i \to -c)_{\text{vermutet}} = \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)} \approx 2$$

$\Rightarrow$

$$d_{\text{vermutet}} \approx 2$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um d zu berechnen.

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-2,303	+5,304	-4,605	+10,605
2	+0,182	+0,033	+0,374	+0,068
3	+0,833	+0,694	+1,701	+1,417
4	+1,224	+1,498	+2,523	+3,088
5	+1,504	+2,262	+3,147	+4,733
6	+1,705	+2,907	+3,624	+6,179
7	+1,872	+3,504	+4,059	+7,598
8	+2,140	+4,580	+4,901	+10,488
9	+2,351	+5,527	+5,931	+13,944
10	+2,485	+6,175	+7,548	+18,757
Σ	+11,993	+32,484	+29,203	+76,877

$$\varnothing d = \frac{22,393}{10} = 2,239$$
$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{29,203}{11,993} = 2,435$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{76,877}{32,484} = 2,367$$
$$Y_{\text{linReg}} = 0,147 + 2,312 \cdot X$$

$\Rightarrow$[11]

$$d \approx 2,3$$

• Ermittlung von c

i	x_i	$x_i + c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)}$	$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$
1	-2,9	+0,135	+3,035
2	-1,8	+1,176	+2,976
3	-0,7	+2,097	+2,797
4	+0,4	+2,995	+2,595
5	+1,5	+3,928	+2,428
6	+2,5	+4,835	+2,335
7	+3,5	+5,841	+2,341
8	+5,5	+8,431	+2,931
9	+7,5	+13,179	+5,679
10	+9,0	+26,625	+17,625

$\Rightarrow$

$$c \approx 3$$

• Berechnung von b

Mit:

$$a = -4,85 \qquad c = 3 \qquad d = 2,33$$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b_{10}	b_9
1	-2,9	+0,985	1,820	1,820
2	-1,8	-0,588	4,100	4,100
3	-0,7	-2,417	4,958	4,958
4	+0,4	-3,456	5,416	5,416
5	+1,5	-4,010	5,577	5,577
6	+2,5	-4,299	5,521	5,521
7	+3,5	-4,481	5,275	5,275
8	+5,5	-4,685	4,249	4,249
9	+7,5	-4,790	2,482	2,482
10	+9,0	-4,838	0,672	0,672
$\sum$	-	-	40,070	39,398

[11] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

$\Rightarrow$

$$b_{10} = 40,070/10 \approx 4$$

Interpretiert man Datenpunkt $i = 10$ als Ausreißer, dann gilt:

$$b_9 = 39,398/9 \approx 4,38$$

$\Rightarrow$

$$b = 4,38$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = -4,85 \qquad b = +4,38 \qquad c = +3,00 \qquad d = +2,30$$

$\Rightarrow$

$$H(x) = 1 - \frac{5,85}{1 + \frac{4,38}{(x+3)^{2,3}}}$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	-2,9	+0,985	+0,993	+0,992
2	-1,8	-0,588	-0,508	+1,157
3	-0,7	-2,417	-2,556	+0,946
4	+0,4	-3,456	-3,634	+0,951
5	+1,5	-4,010	-4,142	+0,968
6	+2,5	-4,299	-4,383	+0,981
7	+3,5	-4,481	-4,523	+0,991
8	+5,5	-4,685	-4,670	+1,003
9	+7,5	-4,790	-4,737	+1,011
10	+9,0	-4,838	-4,774	+1,013
$\sum$	-	-	-	+10,013

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{10,013}{10} \approx 1$$

4.1.2 Beispiel II mit $a \neq 0$

Genutzt wird ein praktisches Beispiel aus [F.] für die Berechnung der Hill-Funktion. Die dort genutzten Koeffizienten werden angegeben mit:

$$a = 0,1 \qquad b = 21 \qquad c = 0,01 \qquad d = 0,45$$

Genutzt wird nur die blaue Alterungskennlinie aus Abbildung 3. Die Messwerte werden rekonstruiert aus der Pixellage der Messpunkte. So gilt für die dort 15 angegebenen Datenpunkte:

i	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - h$	$Y - \%$
1	183	102	0	807	0	100,0
2	333	124	150	785	1	97,27
3	396	145	213	764	2	94,67
4	479	169	296	740	5	91,70
5	542	193	359	716	10	88,72
6	606	221	423	688	20	85,25
7	688	265	505	644	50	79,80
8	751	307	568	602	100	74,60
9	814	353	631	556	200	68,90
10	898	415	715	494	500	61,21
11	961	464	778	445	1.000	55,14
12	1.023	516	840	393	2.000	46,79
13	1.107	593	924	316	5.000	39,16
14	1.169	650	986	259	10.000	32,09
15	1.233	703	1.050	206	20.000	25,53

Mit:

Nullpunkt-Bild: $X = 183\text{PIX}, \qquad Y = 909\text{PIX}$

X-Achse-Bild / Koordinaten:

h	**h^{Exp}**	**Bild-PIX**	**Koord-PIX**	**Δ**
0	-	183	-	-
-	-	-	-	-
1	10^0	333	150	-
-	-	-	-	209
10	10^1	542	359	-
-	-	-	-	210
100	10^2	752	569	-
-	-	-	-	208
1.000	10^3	960	777	-
-	-	-	-	210
10.000	10^4	1.170	987	-

X-Achse-Regressionsgerade:

$$\text{Exp} = 0,00478 \cdot \text{PIX} - 0,717$$

$\Rightarrow$

$$T = 10^{\text{Exp}}$$

Gilt erst ab Stunde 1 - Abbild gestaucht im Bereich 0 bis 1h

Da $H^{*0}(x_i) < 1$ hier gilt (absteigende Y-%-Werte, bei aufsteigenden gilt entsprechend $H^{*0}(x_i) > 1$), wird $H^{*0}(x_i) = Y - \%/100\%$ gesetzt.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	0	1,000	-	-
2	1	0,9727	36,630	27,289
3	2	0,9467	18,762	13,978
4	5	0,9170	12,048	8,976
5	10	0,8872	8,865	6,605
6	20	0,8525	6,780	5,051
7	50	0,7980	4,950	3,688
8	100	0,7460	3,937	2,933
9	200	0,6890	3,215	2,396
10	500	0,6121	2,578	1,921
11	1.000	0,5514	2,229	1,661
12	2.000	0,4679	1,879	1,400
13	5.000	0,3916	1,644	1,225
14	10.000	0,3209	1,473	1,097
15	20.000	0,2553	1,343	1,000

• **Ermittlung von a**

$$a = (1,343 - 1)/1,343 = 0,255$$

Die Datenlage scheint ungünstig, da praktisch im Laufe der Alterung die Leistungsabgabe auf null absinken kann. Das entspräche ein $a = 0$. Es wird mit dem ermittelten Wert weiter gerechnet.

• **Abschätzung von b mit $a = 0,255$**

$$c_{\text{vermutet}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = b(-1) = \varnothing$$
$$b_2 = b(+1) = 27,289$$

i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	0	-	-	-
2	1	27,289	1,038	28,327
3	2	13,978	2,103	29,392
4	5	8,976	3,421	30,710
5	10	6,605	4,869	32,158
6	20	5,051	6,737	34,026
7	50	3,688	10,153	37,441

8	100	2,933	14,117	41,117
9	200	2,396	19,555	46,844
10	500	1,921	29,643	56,932
11	1.000	1,661	41,302	68,591
12	2.000	1,400	68,203	95,492
13	5.000	1,225	121,542	148,831
14	10.000	1,097	193,243	211,987
15	20.000	1,000	67740	67768

Damit ist b abgeschätzt:

$$b = 28,327 \approx 28,3$$

• **Ermittlung von d mit $a = 0,255$**

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	0	-	-	-	-
2	1	0,000	1,038	0,037	-
3	2	0,693	2,103	0,743	1,073
4	5	1,609	3,421	1,230	0,764
5	10	2,303	4,869	1,583	0,687
6	20	2,996	6,737	1,908	0,637
7	50	3,912	10,153	2,318	0,592
8	100	4,605	14,117	2,647	0,575
9	200	5,298	19,555	2,973	0,561
10	500	6,215	29,643	3,389	0,545
11	1.000	6,908	41,302	3,721	0,539
12	2.000	7,601	68,203	4,222	0,556
13	5.000	8,517	121,542	4,800	0,564
14	10.000	9,210	193,243	5,264	0,572
15	20.000	9,903	67740	11,123	-
$\sum$	-	-	-	-	7,090

Ablesen nicht möglich, Abschätzung über:

$$d \approx 7,090/12 \approx 0,59$$

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0,037	0,000
3	0,693	0,480	0,743	0,515
4	1,609	2,589	1,230	1,979
5	2,303	5,304	1,583	3,646
6	2,996	8,976	1,908	5,716
7	3,912	15,304	2,318	9,068

8	4,605	21,206	2,647	12,189
9	5,298	28,068	2,973	15,751
10	6,215	38,626	3,389	21,063
11	6,908	47,720	3,721	25,705
12	7,601	57,775	4,222	32,091
13	8,517	72,539	4,800	40,882
14	9,210	84,824	5,264	48,481
15	9,903	-	11,123	-
$\sum$	59,867	383,411	34,835	217,086

$\Rightarrow$

$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{34,835}{59,867} = 0,582$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{217,086}{383,411} = 0,566$$
$$d_{\text{linReg}} = 0,513 \cdot x + 0,340$$

Inhomogenität zeigt zu erwartende Abweichung an.[12]

Gewählt:

$$d = 0,51$$

• **Ermittlung von** c **mit** $a = 0,255$

i	x_i	$H^{*6}(x_i)^{1/d}$	c
1	0	-	-
2	1	1,076	0,076
3	2	4,271	2,271
4	5	11,048	6,048
5	10	22,012	12,012
6	20	41,505	21,505
7	50	92,471	42,471
8	100	176,032	76,032
9	200	332,650	132,650
10	500	749,632	249,632
11	1.000	1.433	433
12	2.000	3.816	1.816
13	5.000	11.796	6.796
14	10.000	30.378	20.378
15	20.000	-	-

$\Rightarrow$

$$c = 0,076 \approx 0 \qquad (\text{da } \mathrm{x_i} + \mathrm{c} \approx \mathrm{x_i})$$

• **Ermittlung von** b **mit** $a = 0,255$

Mit:

$$a = 0 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

[12] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b
1	0	1,000	-
2	1	0,9727	26,289
3	2	0,9467	18,481
4	5	0,9170	18,124
5	10	0,8872	18,136
6	20	0,8525	18,667
7	50	0,7980	19,766
8	100	0,7460	20,242
9	200	0,6890	20,809
10	500	0,6121	21,905
11	1.000	0,5514	22,729
12	2.000	0,4679	19,307
13	5.000	0,3916	17,288
14	10.000	0,3209	10,640
15	20.000	0,2553	0,0629
$\sum$	-	-	252,383

$\Rightarrow$

$$b = 252,83/13 \approx 19,4$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0,255 \qquad b = 19,4 \qquad c = 0 \qquad d = 0,51$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	-	-
2	1	0,9727	0,9635	1,010
3	2	0,9467	0,9491	0,998
4	5	0,9170	0,9219	0,995
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8570	0,995
7	50	0,7980	0,7952	1,004
8	100	0,7460	0,7388	1,010
9	200	0,6890	0,6762	1,019
10	500	0,6121	0,5896	1,038
11	1.000	0,5514	0,5262	1,048
12	2.000	0,4679	0,4686	0,999
13	5.000	0,3916	0,4049	0,967
14	10.000	0,3209	0,3670	0,874
15	20.000	0,2553	0,3373	0,757
$\sum$	-	-	-	13,707

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{13,707}{14} \approx 0,979$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte** aus [F.]

Die dort angegebenen Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0.1 \qquad b = 21 \qquad c = 0.01 \qquad d = 0,45$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	0,9946	1,005
2	1	0,9727	0,9589	1,014
3	2	0,9467	0,9449	1,002
4	5	0,9170	0,9194	0,997
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8605	0,991
7	50	0,7980	0,8048	0,992
8	100	0,7460	0,7530	0,991
9	200	0,6890	0,6934	0,994
10	500	0,6121	0,6055	1,011
11	1.000	0,5514	0,5356	1,029
12	2.000	0,4679	0,4664	1,003
13	5.000	0,3916	0,3813	1,027
14	10.000	0,3209	0,3247	0,988
15	20.000	0,2553	0,2763	0,924
$\sum$	-	-	-	14,961

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{14,961}{15} \approx 0,997 \approx 1$$

4.1.3 Beispiel II mit $a = 0$

Genutzt wird ein praktisches Beispiel aus cite{002} für die Berechnung der Hill-Funktion. Die dort genutzten Koeffizienten werden angegeben mit:

$$a = 0,1 \qquad b = 21 \qquad c = 0,01 \qquad d = 0,45$$

Genutzt wird nur die blaue Alterungskennlinie aus Abbildung 3. Die Messwerte werden rekonstruiert aus der Pixellage der Messpunkte. So gilt für die dort 15 angegebenen Datenpunkte:

i	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - h$	$Y - \%$
1	183	102	0	807	0	100,0
2	333	124	150	785	1	97,27
3	396	145	213	764	2	94,67
4	479	169	296	740	5	91,70
5	542	193	359	716	10	88,72
6	606	221	423	688	20	85,25
7	688	265	505	644	50	79,80
8	751	307	568	602	100	74,60
9	814	353	631	556	200	68,90
10	898	415	715	494	500	61,21
11	961	464	778	445	1.000	55,14
12	1.023	516	840	393	2.000	46,79
13	1.107	593	924	316	5.000	39,16
14	1.169	650	986	259	10.000	32,09
15	1.233	703	1.050	206	20.000	25,53

Mit:

Nullpunkt-Bild: $X = 183$PIX, $Y = 909$PIX

X-Achse-Bild / Koordinaten:

h	**h^{Exp}**	**Bild-PIX**	**Koord-PIX**	**Δ**
0	-	183	-	-
-	-	-	-	-
1	10^0	333	150	-
-	-	-	-	209
10	10^1	542	359	-
-	-	-	-	210
100	10^2	752	569	-
-	-	-	-	208
1.000	10^3	960	777	-
-	-	-	-	210
10.000	10^4	1.170	987	-

X-Achse-Regressionsgerade:

$$\text{Exp} = 0,00478 \cdot \text{PIX} - 0,717$$

$\Rightarrow$

$$T = 10^{\text{Exp}}$$

Gilt erst ab Stunde 1 - Abbild gestaucht im Bereich 0 bis 1h

Da $H^{*0}(x_i) < 1$ hier gilt (absteigende Y-%-Werte, bei aufsteigenden gilt entsprechend $H^{*0}(x_i) > 1$), wird $H^{*0}(x_i) = Y - \%/100\%$ gesetzt.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	0	1,000	-	-
2	1	0,9727	36,630	27,289
3	2	0,9467	18,762	13,978
4	5	0,9170	12,048	8,976
5	10	0,8872	8,865	6,605
6	20	0,8525	6,780	5,051
7	50	0,7980	4,950	3,688
8	100	0,7460	3,937	2,933
9	200	0,6890	3,215	2,396
10	500	0,6121	2,578	1,921
11	1.000	0,5514	2,229	1,661
12	2.000	0,4679	1,879	1,400
13	5.000	0,3916	1,644	1,225
14	10.000	0,3209	1,473	1,097
15	20.000	0,2553	1,343	1,000

• **Ermittlung von a**

$$a = (1,343 - 1)/1,343 = 0,255$$

Die Datenlage scheint ungünstig, da praktisch im Laufe der Alterung die Leistungsabgabe auf null absinken kann. Das entspräche ein a = 0. Daher wird hier gewählt:

$$a = 0$$

• **Abschätzung von b mit $a = 0$**

$$c_{\text{vermutet}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = b(-1) = \varnothing$$
$$b_2 = b(+1) = 36,630$$

i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	0	-	-	-
2	1	36,630	1,028	37,656
3	2	18,762	2,062	38,687
4	5	12,048	3,315	39,939
5	10	8,865	4,657	41,284
6	20	6,780	6,338	42,971
7	50	4,950	9,272	45,896

8	100	3,937	12,472	49,102
9	200	3,215	16,534	53,157
10	500	2,578	23,213	59,843
11	1.000	2,229	29,801	66,426
12	2.000	1,879	41,656	78,271
13	5.000	1,644	56,909	93,558
14	10.000	1,473	77,518	114,184
15	20.000	1,343	106,848	143,497

Damit ist b abgeschätzt:

$$b = 36,63 \approx 36,6$$

• **Ermittlung von d mit $a = 0$**

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	0	-	-	-	-
2	1	0,000	1,028	0,028	-
3	2	0,693	2,062	0,724	1,045
4	5	1,609	3,315	1,198	0,745
5	10	2,303	4,657	1,538	0,668
6	20	2,996	6,338	1,847	0,616
7	50	3,912	9,272	2,227	0,569
8	100	4,605	12,472	2,523	0,548
9	200	5,298	16,534	2,805	0,529
10	500	6,215	23,213	3,144	0,506
11	1.000	6,908	29,801	3,394	0,491
12	2.000	7,601	41,656	3,729	0,491
13	5.000	8,517	56,909	4,041	0,474
14	10.000	9,210	77,518	4,350	0,472
15	20.000	9,903	106,848	4,671	0,472
$\sum$	-	-	-	-	7,135

Ablesen nicht möglich, Abschätzung über:

$$d \approx 7,135/13 \approx 0,55$$

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0,028	0,000
3	0,693	0,480	0,724	0,502
4	1,609	2,589	1,198	1,928
5	2,303	5,304	1,538	3,542
6	2,996	8,976	1,847	5,534
7	3,912	15,304	2,227	8,712

8	4,605	21,206	2,523	11,618
9	5,298	28,068	2,805	14,861
10	6,215	38,626	3,144	19,540
11	6,908	47,720	3,394	23,446
12	7,601	57,775	3,729	28,344
13	8,517	72,539	4,041	34,417
14	9,210	84,824	4,350	40,064
15	9,903	98,069	4,671	46,257
$\sum$	69,770	481,480	36,219	238,765

$\Rightarrow$

$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{36,219}{69,770} = 0,519$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{238,765}{481,480} = 0,496$$
$$d_{\text{linReg}} = 0,436 \cdot x + 0,417$$

Inhomogenität zeigt zu erwartende Abweichung an.[13]

Gewählt:

$$d = 0,44$$

• **Ermittlung von c mit $a = 0$**

i	x_i	$H^{*6}(x_i)^{1/d}$	c
1	0	-	-
2	1	1,065	0,065
3	2	5,258	3,258
4	5	15,623	10,623
5	10	34,069	24,069
6	20	69,078	49,078
7	50	165,306	115,306
8	100	326,298	226,298
9	200	622,938	422,938
10	500	1.356	856
11	1.000	2.406	1.406
12	2.000	5.186	3.186
13	5.000	10.608	5.608
14	10.000	21.552	11.552
15	20.000	44.992	24.992

$\Rightarrow$

$$c = 0,065 \approx 0 \qquad (\text{da } x_i + c \approx x_i)$$

• **Ermittlung von b mit $a = 0$**

Mit:

$$a = 0 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

[13] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b
1	0	1,000	-
2	1	0,9727	35,630
3	2	0,9467	24,096
4	5	0,9170	22,430
5	10	0,8872	21,667
6	20	0,8525	21,595
7	50	0,7980	22,090
8	100	0,7460	22,280
9	200	0,6890	22,799
10	500	0,6121	24,302
11	1.000	0,5514	25,681
12	2.000	0,4679	24,924
13	5.000	0,3916	27,302
14	10.000	0,3209	27,192
15	20.000	0,2553	26,762
$\sum$	-	-	348,750

$\Rightarrow$

$$b = 348,750/14 \approx 24,9$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0 \qquad b = 24,9 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	-	-
2	1	0,9727	0,9614	1,012
3	2	0,9467	0,9483	0,998
4	5	0,9170	0,9246	0,992
5	10	0,8872	0,9004	0,985
6	20	0,8525	0,8695	0,980
7	50	0,7980	0,8166	0,977
8	100	0,7460	0,7665	0,973
9	200	0,6890	0,7076	0,974
10	500	0,6121	0,6178	0,991
11	1.000	0,5514	0,5438	1,014
12	2.000	0,4679	0,4677	1,000
13	5.000	0,3916	0,3699	1,059
14	10.000	0,3209	0,3020	1,063
15	20.000	0,2553	0,2418	1,056
$\sum$	-	-	-	13,100

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}\left(x_i\right)/H\left(x_i\right)=\frac{13,100}{14}\approx 0,936$$

• **Berechnung der** $H\left(x\right)$**-Werte** aus [F.]

Die dort angegebenen Koeffizienten ergeben berechenbare $H\left(x\right)$-Werte.

$$a=0.1 \qquad b=21 \qquad c=0.01 \qquad d=0,45$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}\left(x_i\right)$	$H\left(x_i\right)$	$H^{*0}\left(x_i\right)/H\left(x_i\right)$
1	0	1,0000	0,9946	1,005
2	1	0,9727	0,9589	1,014
3	2	0,9467	0,9449	1,002
4	5	0,9170	0,9194	0,997
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8605	0,991
7	50	0,7980	0,8048	0,992
8	100	0,7460	0,7530	0,991
9	200	0,6890	0,6934	0,994
10	500	0,6121	0,6055	1,011
11	1.000	0,5514	0,5356	1,029
12	2.000	0,4679	0,4664	1,003
13	5.000	0,3916	0,3813	1,027
14	10.000	0,3209	0,3247	0,988
15	20.000	0,2553	0,2763	0,924
$\sum$	-	-	-	14,961

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}\left(x_i\right)/H\left(x_i\right)=\frac{14,961}{15}\approx 0,997\approx 1$$

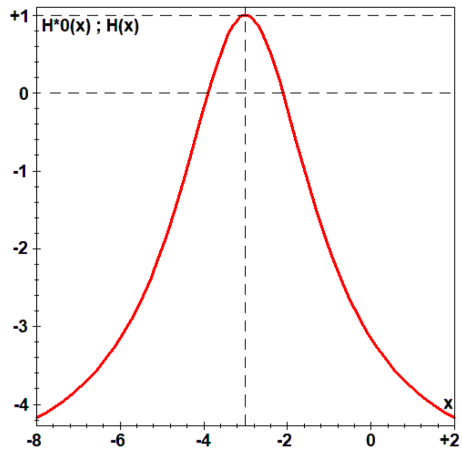
4.2 Grafische Darstellungen

4.2.1 Derivate

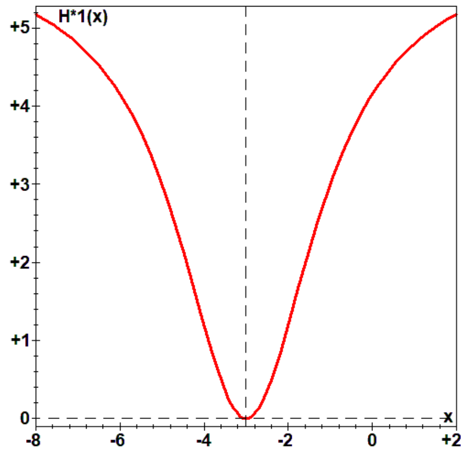
Mit den Beispielskoeffizienten:

$$a = -5 \qquad b = +4 \qquad c = +3 \qquad d = +2$$

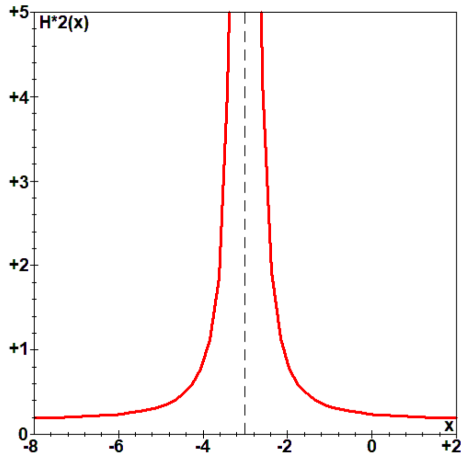
Somit sind $H^{*0}(x)$ und $H(x)$ in der Darstellung kontinuierlich gleich.



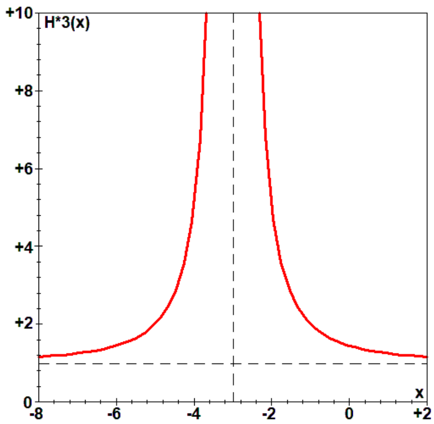
Grafische Darstellung der Hill-Funktion $H(x)$ und dessen Derivat $H^{*0}(x)$.



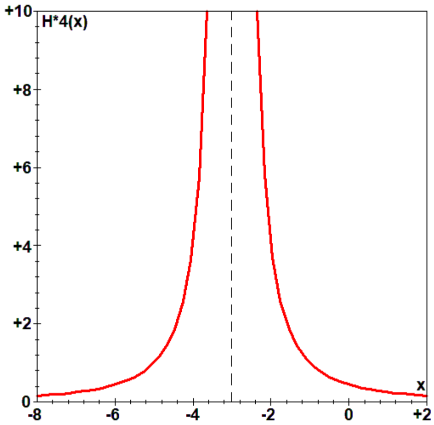
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*1}(x)$.



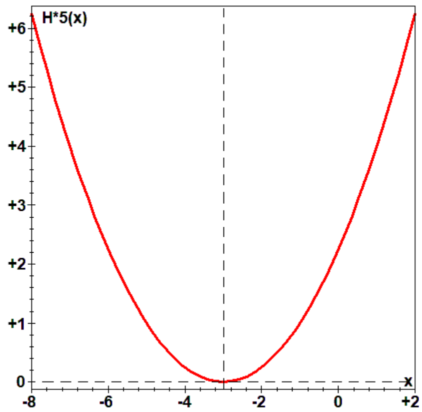
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*2}(x)$.



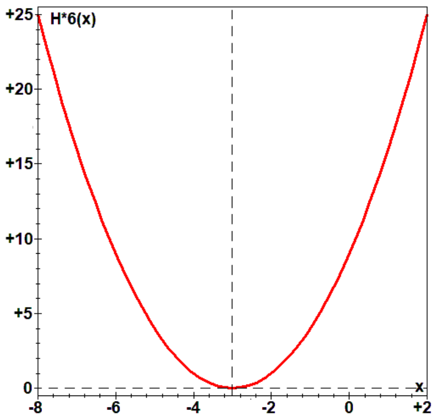
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*3}(x)$.



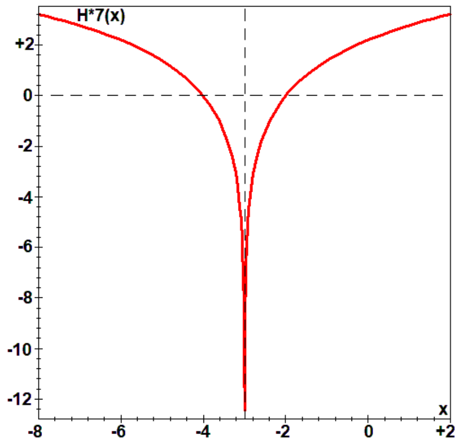
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*4}(x)$.



Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*5}(x)$.

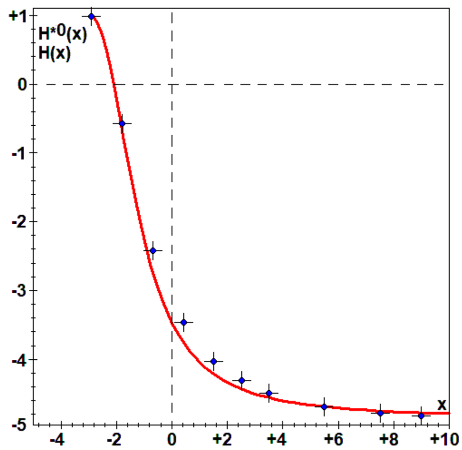


Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*6}(x)$.

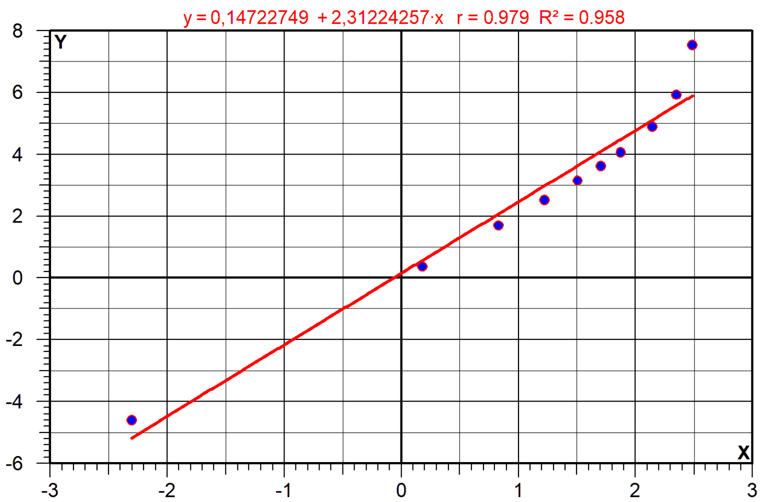


Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*7}\,(x)$.

4.2.2 Beispiel I

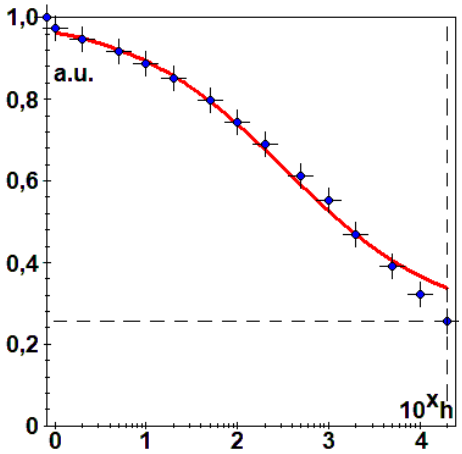


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel I
und das Ergebnis der Regression $H(x)$.

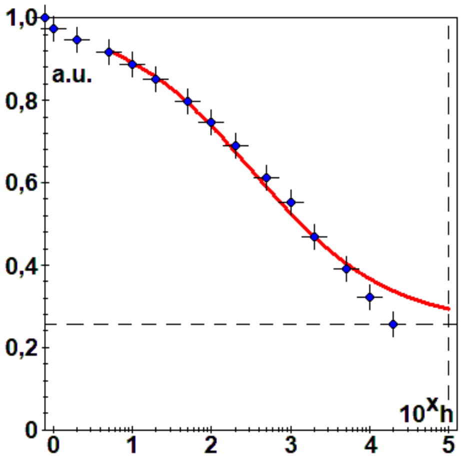


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

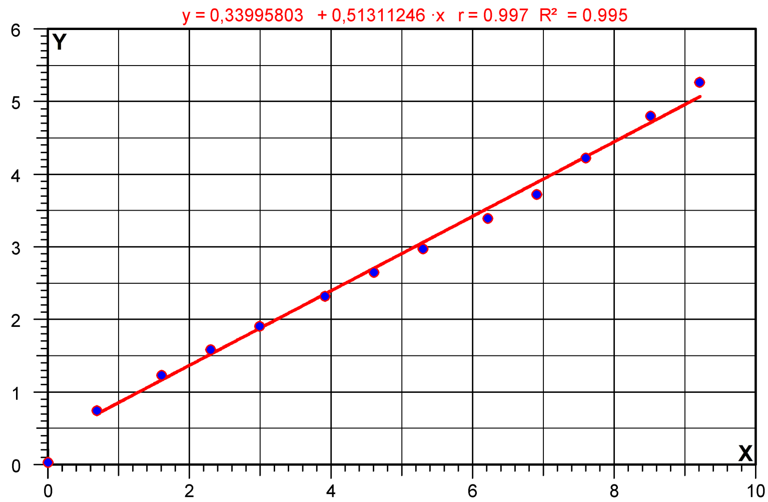
4.2.3 Beispiel II mit $a \neq 0$



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a \neq 0$und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^4h.

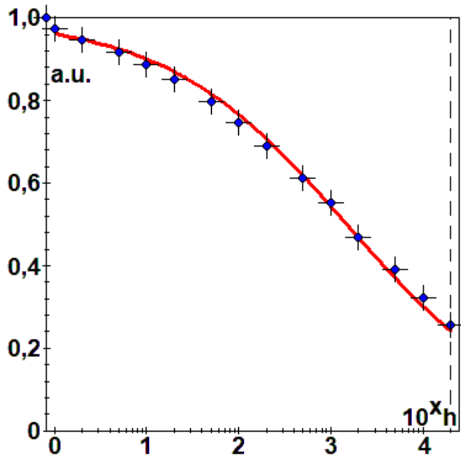


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a \neq 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^5h.

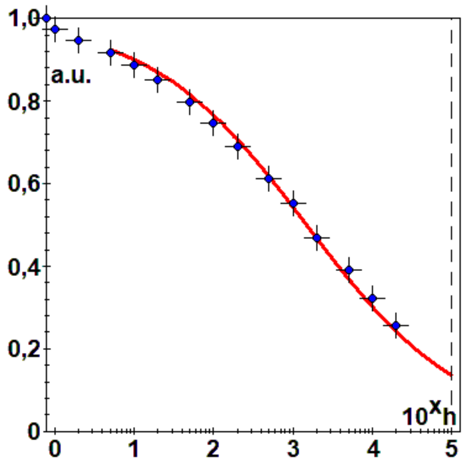


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

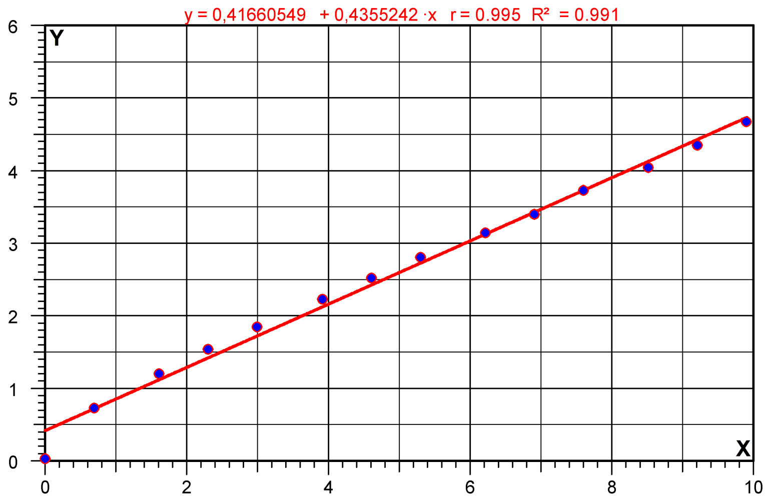
4.2.4 Beispiel II mit $a = 0$



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a = 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^4h.

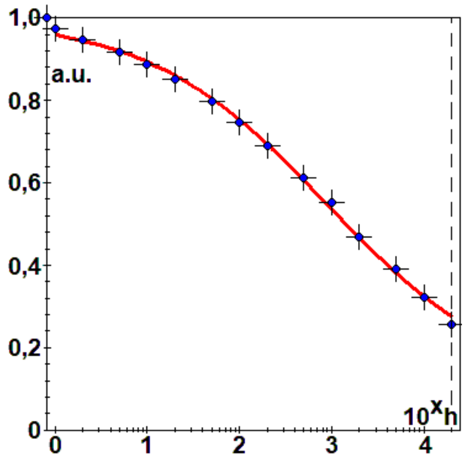


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a = 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^5h.

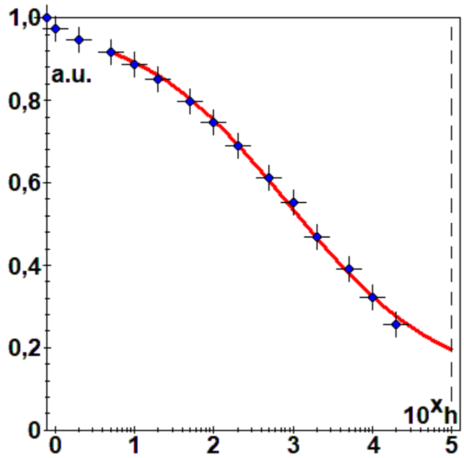


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

4.2.5 Beispiel II mit Werten aus [F.]



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit den dort angegebenen Koeffizienten a bis d und
das Ergebnis der durchgeführten Regression $H(x)$ bis 10^4h.



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit den dort angegebenen Koeffizienten a bis d und
das Ergebnis der durchgeführten Regression $H(x)$ bis 10^5h.

LaTeX 2_ε