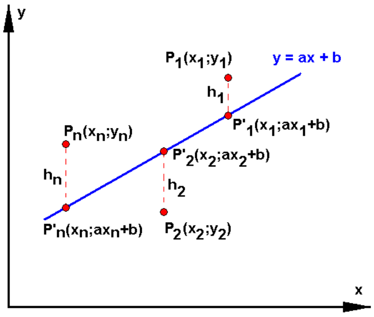
Die Kreisregression als ein Sonderfall der Elliptischen Regression



die Reduktionsmethode

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 16. Februar 2015 – Letzte Revision: 7. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Der Übergang der Elliptischen Regression zur Kreisregression.

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ ist eine Möglichkeit der Elliptischen Regression entwickelt worden. Mit Hilfe der dort gefundenen Arbeitsgleichung lässt sich auch eine Kreisregression entwickeln als Sonderfall. Die vorliegende Datei wird sich im folgenden Verlauf ein wenig mit dieser Thematik beschäftigen. Übergang

1.1 Die Kreisregression für die ungekippte Ellipse $\varphi = 0$

[001]ff. Der Übergang von der Ellipse zum Kreis ist gegeben mit der Transformation

$$e^2 = f^2 \to r^2$$

über die allgemeine Ellipsengleichung der ungekippten Ellipse.

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da dies sofort der Kreisgleichung entspricht, ist der Übergang von der Elliptischen Regression zur Kreisregression ohne weitere Randbedingungen erlaubt und möglich.

1.2 Die Kreisregression für die gekippte Ellipse $\varphi \neq 0$

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:[1]

$$\frac{\left((x-x_M)\cdot\cos\varphi+(y-y_M)\cdot\sin\varphi\right)^2}{f^2}+\frac{\left((y-y_M)\cdot\cos\varphi-(x-x_M)\cdot\sin\varphi\right)^2}{e^2}=1$$

$\Rightarrow$

$$(y-y_M)^2+(x-x_M)^2=r^2$$

$\Rightarrow$

$$y=y_M\pm\sqrt{r^2-(x-x_M)^2}$$

Mit:

$$A=r^2 \qquad B=0$$

Die A- und B- Koeffizienten aus der Elliptischen Regression.

$$A=\frac{e^2\cdot a^2+f^2}{1+a^2} \qquad B=a\cdot\frac{f^2-e^2}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A}=a\cdot\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}$$

Die goniometrischen Parameter.

$$\sin^2\varphi=\sin^2\arctan a=\frac{a^2}{1+a^2}$$

$$\cos^2\varphi=\cos^2\arctan a=\frac{1}{1+a^2}$$

$$\cos\varphi\cdot\sin\varphi=\cos\arctan a\cdot\sin\arctan a=\frac{a}{1+a^2}$$

Der Anstieg der Hauptachse lässt sich über den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} darstellen.

$$\rho_{XY}=a\cdot\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

Für den Kreis muss gelten:

$$\rho_{XY}=0 \qquad \sigma_X=\sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0=a$$

Der Anstieg der Nebenachse ist über den festgelegten Zusammenhang zwischen a und c zu zeigen.

$$a\cdot c=-1$$

$\Rightarrow$

$$c=-\infty$$

[1] Für die Herleitung der Arbeitsgleichung der Elliptischen Regression siehe „Elliptische Regression von Datenpunkten.“

1.3 Der Kreismittelpunkt $P_{MP}\left(x_{MP}; y_{MP}\right)$

Der Kreismittelpunkt ist weiterhin gemäß der Vorschrift aus der Elliptischen Regression definiert.

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n} \qquad y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

Wobei im folgenden $\{\bullet\}$ die Summe der einzelnen Werte entspricht.

2 Die Reduzierung der Elliptischen Relationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

Es sind daher die Grenzwerte zu bilden. reduzierte Relationen

2.1 Die Anstiege a und c

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs a:

$$\tan\varphi = \frac{B}{A - e^2} = \frac{0}{r^2 - r^2} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs c:

$$-\cot\varphi = \frac{e^2 - A}{B} = \frac{r^2 - r^2}{0} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Vereinfachung von a:

$$\frac{B + e^2 \cdot a}{A} = a$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0 + r^2 \cdot 0}{r^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Vereinfachung von c:

$$\frac{-A}{B + e^2 \cdot a} = c$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0 + r^2 \cdot 0} = -\infty$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0} = -\infty$$

Zusammenhang zwischen den Anstiegen a und c:[2]

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot (-\infty) = -1$$

[2]Hier und nur hier als Grenzwert gültig

2.2 Der Winkel φ

Der $\sin$ des Winkels φ:

$$\frac{a^2}{1+a^2} = \frac{A \cdot a^2 \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot a^2}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Der $\cos$ des Winkels φ:

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{A \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot e^2}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{r^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Das Produkt von $\sin$ und $\cos$:

$$\frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{a-c} = \frac{A \cdot a}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0}{1+0^2} = \frac{1}{0+\infty} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen:

$$\frac{1-a}{1+a^2} = \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1-0}{1+0^2} = \cos^2 \varphi - 0 = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - 0)$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

2.3 Die A- und B- Koeffizienten

Müssen sich per Definition zu 0 oder r^{2n} reduzieren.

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten A:

$$\frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{B + e^2 \cdot a}{a} = f^2 - B \cdot a = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi = A$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 \cdot 0^2 + r^2}{1 + 0^2} = \frac{0 + r^2}{1} = r^2 - 0 \cdot 0 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = a \cdot \left(A - e^2\right) = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = B$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Summe von A und B:

$$\left(e^2 + f^2\right) \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + f^4 = e^4 \cdot \sin^2 \varphi + f^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{e^4 \cdot a^2 + f^4}{1 + a^2} = A^2 + B^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + r^4 = r^4 \cdot \sin^2 \varphi + r^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{r^4 \cdot 0^2 + r^4}{1 + 0^2} = r^4 + 0$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

Produkt von A und B:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = A \cdot B$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Produkt von A und B mit dem Anstieg a:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = A \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$

Sowie:

$$\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin^2 \varphi = B \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{0^2}{1 + 0^2} = 0 \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Quotient von A und B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} = \frac{B}{A}$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} = \frac{0}{r^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Sowie:

$$\frac{f^2}{B} - a = \frac{A}{B}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{0} - 0 = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$

Verschiedene Zusammenhänge und Vereinfachungen:

$$A \cdot a - B = e^2 \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 - 0 = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$

Sowie:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} = \frac{r^2}{0} + 0 - \frac{1}{0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{0} = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$

Sowie:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} = f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2} = r^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Sowie:

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 \cdot r^2}{0^2 + r^2 \cdot r^2} = \left(r^2 - r^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{r^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Sowie:

$$\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{1}{e^2} \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

2.4 Sonstige Relationen

Vereinfachung von e:

$$\frac{A \cdot a - B}{a} = \frac{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}{A} \cdot \cos^2 \varphi = e^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 - 0}{1} = \frac{r^2 \cdot r^2 + \left(0 - r^2 \cdot 0\right)^2}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + 0^2} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Vereinfachung von f:

$$A + B \cdot a = f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 + 0 \cdot 0 = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Zusammenhang zwischen e und f:

$$A^2 - B^2 + \frac{a^2 - 1}{a} \cdot A \cdot B = A \cdot \left(f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - B^2 = e^2 \cdot f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 - 0^2 + \frac{0 - 1}{1} \cdot r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot \left(r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - 0^2 = r^2 \cdot r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

3 Die Ermittlung des Radiuses r

Wie aber nun den Radius r berechnen? Die Berechnungsgrundlage steckt in der allgemeinen Kreisgleichung selbst. Radius r

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da es sich um eine Regression handelt wird der Radius berechnet aus:

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} + \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y^2 + \sigma_X^2 = r^2$$

Wobei die Klammerwerte $\{\bullet\}$ die Summe aller Einzelwerte darstellt.

Beispiel

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	r_i^2
128	100	1	321 489	121 627	443 116
256	250	2	192 721	39 502	232 223
440	510	3	65 025	3 752	68 777
640	160	4	3 025	83 376	86 401
768	400	5	5 329	2 377	7 706
896	520	6	40 401	5 077	45 478
1152	750	7	208 849	90 752	299 601
1280	900	8	342 225	203 627	545 852
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	1 729 154

Damit ist gegeben:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Und:

$$r^2 = \frac{1729154}{8} = 216144,25$$

$\Rightarrow$

$$r = 464,9$$

Wobei vor dem Übergang galt:

$$f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383 \qquad e^2 = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$f = 383,9 \qquad e = 262,22$$

Aus der Definition von e^2, f^2 und r^2 ist ersichtlich, dass im kartesischen Koordinaten gelten muss:

$$x \perp y$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = e^2 + f^2$$

$\Rightarrow$

$$464,9^2 \stackrel{?}{=} 262,22^2 + 383,9^2$$

$\Rightarrow$

$$216144 \stackrel{!}{=} 216144$$

Sowie:

$$r \leq e + f$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \stackrel{?}{\leq} 262,22 + 383,9$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \stackrel{!}{<} 646,12$$

4 Die Reduzierung der Elliptischen Punktdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

4.1 MP = Mittelpunkt

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n}$$

Sowie:

reduzierte Punktdefinitionen

$$y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

4.2 WB = Westlicher Brennpunkt

Die lineare Exzentrizität ε_L ist definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{|\{e^2\} - \{f^2\}|} = \sqrt{|\{r^2\} - \{r^2\}|} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{WB} = y_{MP}$$

4.3 OB = Östlicher Brennpunkt

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{OB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{OB} = y_{MP}$$

4.4 SZ = Scheinbarer Zenit

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi = y_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SZ} = y_{MP} + r$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi = x_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SZ} = x_{MP}$$

4.5 SN = Scheinbarer Nadir

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi = y_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SN} = y_{MP} - r$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi = x_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SN} = x_{MP}$$

4.6 WZ = Wahrer Zenit

$$x_{WZ} = x_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} = x_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WZ} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + r$$

4.7 WN = Wahrer Nadir

$$x_{WN} = x_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} = x_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WN} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WN} = y_{MP} - r$$

4.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos\varphi = x_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{OS} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin\varphi = y_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{OS} = y_{MP}$$

4.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos\varphi = x_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WS} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin\varphi = y_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{WS} = y_{MP}$$

4.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} = x_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$y_{OW} = y_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}} = y_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP}$$

4.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} = x_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$y_{WW} = y_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}} = y_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP}$$

5 Die Reduzierung der Elliptischen Achsdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

5.1 Die Hauptachse y_H

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

$\Rightarrow$ reduzierte Achsdefinitionen

$$y_H = 0 \cdot x_H + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = b$$

5.2 Die Nebenachse y_N

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\infty \cdot \operatorname{sgn} x_N + d$$

5.3 Die Scheitelachse y_S

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{0}{r^2} \cdot x_S + \frac{r^2 \cdot 0}{r^2} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{\sin 0 \cdot \cos 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_S + r^2 \cdot \frac{\tan 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot x_S + \frac{r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot \left(1 + 0^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

5.4 Die Extremaachse y_E

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_E + r^2 \cdot \frac{0 \cdot 0 - r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_E - \frac{r^2}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

6 Die Reduzierung der Elliptischen Winkelrelationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \rightarrow r^2$

6.1 Der Winkel α zwischen Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage:

reduzierte Winkel

$$\tan\alpha = m$$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Achsendarstellung	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische Darst.	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

$\Rightarrow$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	n.def.	n.def.	0	∞
Achsendarstellung	0	$-\infty$	0	∞
Goniometrische Darst.	n.def.	n.def.	0	∞

6.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	$\left\|\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\|$	$\left\|\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\|$
y_N	∞	0	$\left\|\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\|$	$\left\|\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\|$
y_S	$\left\|\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\|$	$\left\|\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\|$	0	$\left\|\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\|$
y_E	$\left\|\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\|$	$\left\|\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\|$	$\left\|\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\|$	0

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	0	∞
y_N	∞	0	∞	0
y_S	n.def.	n.def.	0	∞
y_E	n.def.	n.def.	∞	0

Rechts oben Koeffizientendarstellung, Links unten die Goniometrische Darstellung

6.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{f^2}{e^2}} = a \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2}} = a = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2 \varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{e^2}{f^2} = \frac{\tan^2 \varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$[3]

$$\frac{r^2}{r^2} = 0^2 \cdot \text{ n.def} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{r^2}{r^2} = \frac{\text{n.def.}}{0^2}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \text{ n.def.} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = \text{ n.def.}$$

$\Rightarrow$

$\tan \beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\|\tan^3 \varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot^3 \varphi\right\|$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2} \left\|\tan \varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot \varphi\right\|$	$\left\|\frac{\rho_{XY}^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^4 \varphi - \rho_{XY}^4 \cdot \cos^4 \varphi}\right\|$

$\Rightarrow$

$\tan \beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

$\Rightarrow$

$\rho_{XY}^2 =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$

$\Rightarrow$

[3] Hier und nur hier so gültig

$\rho^2_{XY} =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} ist nur über obig erstgenannte Berechnungsgrundlage definiert.

7 Vergleich zur Kreisregression nach der „Methode der kleinsten Quadrate“

Für die Berechnung der Mittelpunktkoordinaten und des Radius nach der allgemein bekannten Methode der Kreisregression werden Koeffizienten benötigt. Vergleich

$$A = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \qquad B = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$C = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \qquad D = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

Aus den Koeffizienten ergeben sich die Mittelpunktskoordinaten.

$$x_{MP} = \frac{D \cdot E - C \cdot F}{A \cdot D - B \cdot C} \qquad y_{MP} = \frac{A \cdot F - B \cdot E}{A \cdot D - B \cdot C}$$

Sowie der Radius.

$$r^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{MP})^2 + (y_i - y_{MP})^2 \right)$$

Mit den im Beispiel angegebenen Datenpaaren ergeben sich folgende Werte.

$$A = 18.865.024 \qquad B = 11.162.720 \qquad C = 11.162.720$$

$$D = 8.801.400 \qquad E = 18.844.156.512 \qquad F = 12.651.783.800$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = 594{,}38 \qquad y_{MP} = 683{,}63$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = 281434{,}11$$

$\Rightarrow$

$$r = 530{,}50$$

Ein tabellarischer Vergleich beider Methoden.

	Reduktionsmethode	Kleinste- Quadrate-Methode	Relative Abweichung in %
x_{MP}	695,00	594,38	16,93
y_{MP}	448,75	683,63	34,36
r	464,90	530,50	12,37

Warum diese Abweichungen obwohl beide Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt wurden. Die Antwort liegt in den Randbedingungen. Wurde im vorliegenden Fall für die Anstiege der Haupt- a und Nebenachse c festgelegt

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$a = 0 \qquad c \rightarrow -\infty$$

und dann je eine Fehlerfunktion (für die Haupt- und Nebenachse separat) minimiert, so liegt in der fremden Methode nur eine Fehlerfunktion vor

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r^2-(x_i-x_{MP})^2-(y_i-y_{MP})^2\right)^2 \to MIN$$

ohne Beachtung des Winkels zwischen Haupt- und Nebenachse. Was auch verständlich ist, da bei einer Kreisregression dies ursächlich nicht von Interesse ist.

Für die Berechnung des Kreismittelpunktes sind Vorgaben bekannt.

Kleinste- Quadrate:

$$x_{MP}=\frac{D\cdot E-C\cdot F}{A\cdot D-B\cdot C} \qquad y_{MP}=\frac{A\cdot F-B\cdot E}{A\cdot D-B\cdot C}$$

Reduktionsmethode:

$$x_{MP}=\frac{d-b}{a-c} \qquad y_{MP}=\frac{d\cdot a-c\cdot b}{a-c}$$

Aus diesen beiden Berechnungsgrundlagen können die Anstiege der Haupt- und Nebenachse für die Methode „Kleinste- Quadrate“ ermittelt werden. So sind folgende Äquivalenzen extrahierbar.

$$a-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a-c\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Das c wird substituiert durch $c=-\frac{1}{a}$.

$$a+\tfrac{1}{a}=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a+\tfrac{1}{a}\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Das $\frac{1}{a}$ der linken Gleichung wird in die rechte eingesetzt und umgestellt.

$$d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C-a)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad (d-b)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Der Ausdruck $d-b$ wird von links nach rechts ersetzt.

$$(D\cdot E-C\cdot F)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Der rechte Term ist ersetzbar.

$$A\cdot F-B\cdot E=d\cdot a-c\cdot b$$

$\Rightarrow$

$$(D\cdot E-C\cdot F)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=d\cdot a-c\cdot b$$

Damit ist c und d bekannt.

$$c=B\cdot C-A\cdot D \qquad d=D\cdot E-C\cdot F$$

Somit auch a und b.

$$a=A\cdot D-B\cdot C+c \qquad b=C\cdot F-D\cdot E+d$$

$\Rightarrow$

$$a=0 \qquad b=0$$

Als kleine Probe kann gelten.

$$a-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a-c\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-=D\cdot E-C\cdot F \qquad 0=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-(B\cdot C-A\cdot D)=A\cdot D-B\cdot C \qquad D\cdot E-C\cdot F=D\cdot E-C\cdot F$$

Insbesondere:

$$A \cdot F - B \cdot E = 0$$

Mit den berechneten Werten von c und d ist ablesbar, dass die Bedingung

$$c = -\infty$$

nicht erfüllt ist. Für vorliegendes Beispiel ist $c_{\text{Kleinste- Quadrate}}$

$$c_{\text{K-Q}} = -41.432.304.435.200 \neq -\infty$$

Sowie:

$$d_{\text{K-Q}} = 24.626.639.064.780.800$$

Und:

$$A \cdot F - B \cdot E = 28.324.162.250.178.560 \neq 0$$

Letztendlich ist es Sinn einer Kreisregression, dass der Ausdruck F wahr wird.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2 \right) = 0$$

Für das Verfahren nach der Reduktionsmethode.

$$r^2 = 216144,25$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	F
128	100	1	321 489	121 627	-226 971, 75
256	250	2	192 721	39 502	-16 078, 75
440	510	3	65 025	3 752	+147 367, 25
640	160	4	3 025	83 376	+129 743, 25
768	400	5	5 329	2 377	+208 438, 25
896	520	6	40 401	5 077	+170 666, 25
1152	750	7	208 849	90 752	-83 456, 75
1280	900	8	342 225	203 627	-329 707, 75
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	**0**

Muss auch so sein, da letztendlich r^2 ermittelt wurde über:

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} + \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

Für das Verfahren nach Kleinste- Quadrate.

$$x_{MP} = 594{,}38 \qquad y_{MP} = 683{,}63 \qquad r^2 = 281434{,}11$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_{MP})^2$	$(y_i - y_{MP})^2$	F
128	100	1	217 510	340 624	-276 700
256	250	2	114 501	188 035	-21 102
440	510	3	23 833	30 147	+227 454
640	160	4	2 081	274 188	+ 5 165
768	400	5	30 144	80 446	+170 844
896	520	6	90 975	26 775	+163 684
1152	750	7	310 940	4 405	-33 911
1280	900	8	470 075	46 816	-235 457
5 560	3 590	8	1 260 059	991 436	**0**

Beide Verfahren sind infolge des Ergebnisses **Null** gleichberechtigte Kreisregressionen.

8 Zusammenfassung

Die Kreisregression ist ein Sonderfall der Elliptischen Regression und kann daher aus dieser gebildet werden. Die Arbeitsgleichung ist gegeben mit: Zusammenfassung

$$(y - y_{MP})^2 + (x - x_{MP})^2 = r^2$$

Wobei sich die Außermittigkeiten y_{MP} und x_{MP} durch den Mittelwert der Datenpaare ergeben.

$$y_M = \frac{\{y_i\}}{n} \qquad x_M = \frac{\{x_i\}}{n}$$

Der Radius r des regressierten Kreises ist ermittelbar über die Arbeitsgleichung.

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\} + \left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

Wobei n die maximale Anzahl der Datenpaare darstellt.

Sie, die Kreisregression vorgestellter Art, erfüllt die Minimierung der Fehlerfunktion F.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2\right) = 0$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$