Nadirpoint - Utopiapoint
Zwei Begriffe aus der Systemtheorie

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 3. März 2007 – Letzte Revision: 14. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

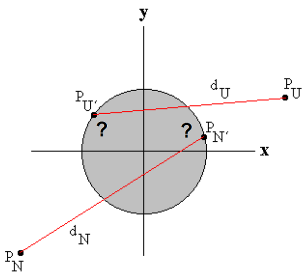
[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. MethoMatica. www.Zenithpoint.de.

---

1 Der Nadir- und der Utopiapoint am Beispiel

[Dip] Ein 2D-System soll optimiert werden. Bekannt sind sein Nadirpoint P_N und sein Utopiapoint P_U. Aus verschiedenen Gründen wird das System mit einer einschränkenden, kreisförmigen Sicherheit belegt, was den Zustandsraum Z definiert, indem das System alle seine Aufgaben erfüllen kann. Es soll der Punkt P gefunden werden, welcher den Zustand des Systems optimiert. Das Vorangehen zwecks Findung des optimalen Punktes ist es, den maximalen, euklidischen Abstand zum Nadir- und den minimalen, euklidischen Abstand zum Utopiapunkt zu finden.

Punktbegriffe



Es ist die einschränkende Funktion für den Zustandsraum definiert. Hier im Beispiel mit:

$$Z \rightarrow f(x) = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{mit} \quad P_N(-2;-2) \quad \text{und} \quad P_U(+2;+1)$$

Nadirpoint:

Es ist der Punkt P'_N gesucht, der dem Nadir am Entferntesten ist.

$$D_N = \sqrt{(x'_N+2)^2 + (f(x'_N)+2)^2} \rightarrow MAX$$

$\Rightarrow$

$$P'_N \frac{1}{2}\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$$

Utopiapoint:

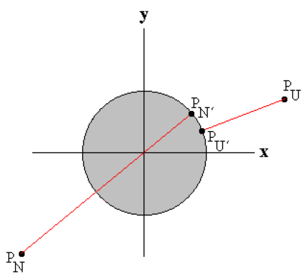
Es ist der Punkt P'_U gesucht, der dem Utopia am Nächsten ist.

$$D_U = \sqrt{(x'_U-2)^2 + (f(x'_U)-1)^2} \rightarrow MIN$$

$\Rightarrow$

$$P'_U \frac{1}{5}\left(2\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$$

Beide Punkte sind nicht identisch. Daher ist das System nicht im optimalen Zustand.



2 Verschiebung des Zustandsraumes Z zu Z'

Ein 2D-System soll optimiert werden. Bekannt sind der Nadirpoint P_N und P'_N. Sowie der Utopiapoint P_U und P'_U. Die Punkte P'_N und P'_U fallen nicht zusammen. Gesucht ist die Begrenzung des neuen Zustandsraumes Z', welcher beide Punkte vereinigt. Dieser Punkt befindet sich hier auf einer Geraden, auf welcher auch $P_N$und P_U liegt. Zustandsraum

Die Funktion zwischen Nadir- und Utopiapoint.

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = m \cdot x + n$$

Schnittpunkt mit der Zustandsraumgrenze Z.

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$P_K = (+0,973; +0,23) \qquad P'_K = (-0,493; -0,87)$$

Damit ist der Anstieg an der Zustandsraumgrenze $\sqrt{1 - x^2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ im gemeinsamen Punkt P_K bekannt.

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$$

Die allgemeine Annahme der neuen Zustandsraumgrenze.

$$y = a \pm \sqrt{1 - (x + b)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{db}y = -\frac{x - b}{\sqrt{1 - (x + b)^2}} = -\frac{4}{3}$$

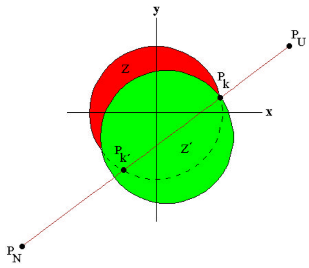
$\Rightarrow$

$$b = -0,173 \qquad a = -0,37$$

$\Rightarrow$

$$y = \pm\sqrt{1 - (x - 0,173)^2} - 0,37$$

Der neue Zustandsraum Z', welcher die betrachteten Punkte vereint, ist ermittelt.

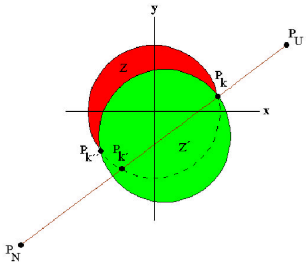


Der alte und der neue Zustandsraum sind nicht deckungsgleich. Ob Z' alle seine Aufgaben damit erfüllen kann, ist nicht gesichert. Eine Anpassung der Zustandsraumgrenze ist zu untersuchen.

3 Kompatibilität zwischen Z und Z'

Kompatibilität

Von den Zustandsräumen Z und Z' sind dessen Begrenzungsfunktionen bekannt. Es ist zu prüfen, um wieviel das reale System Z und das dazu gehörige optimale System Z' sich überlappen. Die Flächen sollen als Vergleichsgrößen dienen.



Der Schnittpunkt P_K'' ist berechenbar über:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(x-0,173)^2} + 0,37$$

$\Rightarrow$

$$P_K''\,(-0,8;-0,6)$$

Die Strecke b ist zwischen den Punkten definiert.

$$b = \overline{P_K P_K''} = 1,958 < 2r = 2$$

Daher gilt:

$$r = \frac{1}{8} \cdot \frac{4a^2 + b^2}{a}$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = 0,8 \qquad a_2 = 1,2$$

Damit ist die Begrenzungsfunktion Z' im gedrehten und verschobenen Koordinatensystem gegeben.

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot b = 0,98$$

Sowie:

$$y_m = a - r$$

$\Rightarrow$

$$y_Z = \sqrt{1-(x-0,98)^2} + 0,2 \qquad y_Z' = \sqrt{1-(x-0,98)^2} - 0,2$$

Die Flächen.

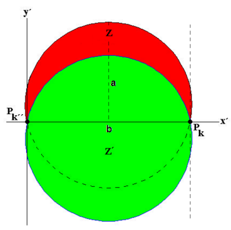
$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \approx 3,142 \qquad A_Z' = \int_0^b y_Z' \cdot dx = 1,173$$

$$A_Z = A - A_Z' = 1,969 \qquad A_Z \approx \int_0^b y_Z \cdot dx = 1,957$$

Da alle Flächen bekannt sind, kann das gesuchte Verhältnis berechnet werden.

$$Z_{\%} = \frac{A_Z'}{A_Z} \cdot 100\% = 59,573\% \approx 60\%$$

Der reale Zustandsraum Z entspricht nur zu 60% dem optimalen Zustandsraum Z'. 40% der Aufgaben kann das System nicht erfüllen. Eine Anpassung der Zustandsraumgrenze ist zu untersuchen.



4 Änderung der Zustandsraumgrenze von Z'

Von einem Zustandsraum Z ist der optimale Zustandsraum Z' bekannt. Die Übereinstimmung beider Zustandsräume selbst ist mit 60% zu gering. Es ist zu prüfen, wieviel Abdeckung ein modifizierter Zustandsraum Z'' dem realen Z entspricht. Der Zustandsraum Z' wird modifiziert, indem die Formfaktoren a und b auf eine Ellipse transformiert werden. Die Flächen sollen als Vergleichsgrößen dienen. Optimierung

Die Formfaktoren waren gegeben.

$$a = 1,2 \qquad b = 1,958$$

Die Ellipse:

$$y''_Z = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b \cdot x - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$y''_Z = \sqrt{(2,942 - 1,5x) \cdot x}$$

Die Flächen dazu:

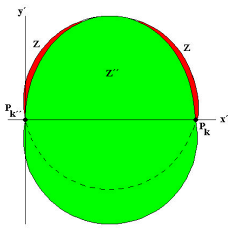
$$A_Z = 1,969$$

$$A''_Z = \int_0^b y''_Z \cdot dx = 1,85$$

Da alle Flächen bekannt sind, kann das gesuchte Verhältnis berechnet werden.

$$Z_{\%} = \frac{A''_Z}{A_Z} \cdot 100\% = 93,96\% \approx 94\%$$

Der modifizierte Zustandsraum Z'' entspricht zu 94% dem realen Z.



LaTeX 2_ε