Die Bilaterale-lineare-Regression – BLR
Das Gütekriterium $|\beta_0|$, die Bedingungen $a_1 \cdot a_2$ und ρ_{xy}^2

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. Juli 2021 – Letzte Revision: 4. August 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Modellbildung **5**
2.1 Winkel α . . . 5
2.2 Schnittpunkt P_s . . . 6
2.3 Winkelhalbierende y_w . . . 8
2.4 Schnittpunkt P_w . . . 9
2.5 Fehlerfläche F . . . 10
2.6 Idealfall . . . 11

3 Zusammenfassung **13**

4 Beispiel **15**
4.1 Basiswerte nichtinvertiert . . . 15
4.2 Basiswerte invertiert . . . 16
4.3 Erweiterte Werte . . . 17

5 Beispiel - Idealfall **19**
5.1 Basiswerte nichtinvertiert . . . 19
5.2 Basiswerte invertiert . . . 20
5.3 Erweiterte Werte . . . 21

6 Anhang **23**
6.1 Allgemeine Terme . . . 23
6.2 Gütekriterium β . . . 25
6.3 Gütekriterium $|\beta_0|$ . . . 26

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

Führt man eine einfache lineare Regression (ELR) durch, zum Beispiel das hier enthaltene erste Beispiel, kommt man zu dem Ergebnis:

$$y_1 = 0,5928 \cdot x_1 + 37,5079 = a_1 \cdot x_1 + b_1$$

Das Bestimmtheitsmaß beträgt für diese Daten $R^2 = 0,750$. Die ELR ist hier eine Abbildung von $X \to Y$. Invertiert man die Datenpaare und erfragt die Regression für $Y \to X$ ergibt sich zwar auch ein $R^2 = 0,750$, aber die Regressionsfunktion nun mit:

$$x_2 = 1,2683 \cdot y_2 + 125,855 = a_2 \cdot y_2 + b_2$$

$\Rightarrow$

$$y_2 = 0,7885 \cdot x_2 - 99,231$$

Die Ausdrücke für y_1 und y_2 unterscheiden sich deutlich, besonders die Inhomogenitäten weichen voneinander ab. Besonders aufffällig ist die Besonderheit der Anstiege von x_1 und y_2. So gilt wahrscheinlich der Zusammenhang $R^2 = 0,750 = 1,2683 \cdot 0,5928 = a_1 \cdot a_2$. Die Frage ist nun, ob es einen Anstieg a_1 gibt mit dem Bestimmtheitsmaß R^2, bei dem die Invertierung widerspruchslos ist. Ein angehangenes Beispiel wäre:

$$y_1 = 0,5 \cdot x_1 - 1 = a_1 \cdot x_1 + b_1$$

Mit $R^2 = 1$. Die Invertierung ergibt nun:

$$x_2 = 2 \cdot y_2 + 2 = a_2 \cdot y_2 + b_2$$

$\Rightarrow$

$$y_2 = 0,5 \cdot x_2 - 1$$

Mit $R^2 = 1 = 2 \cdot 0,5 = a_1 \cdot a_2$.

Die aufgeworfenen Fragen sollen im Folgenden untersucht werden.

2 Modellbildung

2.1 Winkel α

[001]ff.

• Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine lineare Regression soll durchgeführt werden. Ergebnis dieser ist:

$$y = a \cdot x + b$$

Mit:

$$\sigma_x \qquad \sigma_y \qquad \rho_{xy}$$

• Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine bilaterale lineare Regression soll durchgeführt werden der Form $f(x \in X_i \rightarrow y \in Y_i)$. Ergebnis dieser ist:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1$$

Mit:

$$_1\sigma_x \qquad _1\sigma_y \qquad _1\rho_{xy}$$

• Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine bilaterale lineare Regression soll durchgeführt werden der Form $f(x \in Y_i \rightarrow y \in X_i)$. Ergebnis dieser ist:

$$y_2 = a_2 \cdot x + b_2$$

Mit:

$$_2\sigma_x \qquad _2\sigma_y \qquad _2\rho_{xy}$$

Aus Symmetriegründen muss dann gelten:

$$\rho_{xy} = {_1\rho_{xy}} = {_2\rho_{xy}}$$

$$\sigma_x = {_1\sigma_x} = {_2\sigma_y}$$

$$\sigma_y = {_1\sigma_y} = {_2\sigma_x}$$

Der Schnittwinkel zwischen y_1 und y_2 ist damit definiert.

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = A$$

Da allgemein gilt:

$$\rho_{xy} = a \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Folgt:

$$\tan\alpha = \left|\frac{\rho_{xy}}{1 + \rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\right| = |B \cdot C|$$

• Wann ist $\tan\alpha = 0$?

Wenn:

$$\rho_{xy} = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a_1 = a_2$$

Sowie:

$$\sigma_x = \sigma_y$$

Das entspricht dann dem Sonderfall einer Kreisregression.

• Wann ist $\tan\alpha = \infty$?

Wenn:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Was

$$\rho_{xy}^2 = -1$$

entspräche.

2.2 Schnittpunkt P_s

Gegeben sind die Egebnisse einer bilateralen linearen Regression:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1 \qquad y_2 = a_2 \cdot x + b_2$$

Gesucht ist der Schnittpunkt $P_s\left(x_s, y_s\right)$ beider Funktionen.

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

$\Rightarrow$

$$y_{s,1} = a_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = a_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_2$$

Liegt dieser Punkt auf einer Quadrantenhalbierenden muss gelten:

$$y_{s,1} = +x_s \qquad \text{oder} \qquad y_{s,1} = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}$$

Sowie:

$$y_{s,2} = +x_s \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}$$

Der Abstand zu einer Quadrantenhalbierenden ist gesucht. Die Lotrechte auf dieser ist definiert.

$$y_{l,1} = (+1) \cdot (x - x_s) + y_s \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = (-1) \cdot (x - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_{l,1} = +x_l - x_s + y_s \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = -x_l + x_s + y_s$$

Schnittpunkt $P_l\left(x_l, y_l\right)$ mit dieser:

$$+x_l = x_l - x_s + y_s \qquad +x_l = -x_l + x_s + y$$

oder

$$-x_l = x_l - x_s + y_s \qquad -x_l = -x_l + x_s + y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_s = x_s \qquad x_{l;2} = \frac{x_s + y_s}{2}$$

oder

$$x_{l;1} = \frac{x_s - y_s}{2} \qquad y_s = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$y_{l,1} = \frac{y_s - x_s}{2} \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = \frac{x_s + y_s}{2}$$

$\Rightarrow$

$$P_{l,1}\left(\frac{x_s - y_s}{2}, \frac{y_s - x_s}{2}\right) \qquad \text{oder} \qquad P_{l,2}\left(\frac{x_s + y_s}{2}, \frac{y_s + x_s}{2}\right)$$

Der Abstand zwischen $P_s\left(x_s, y_s\right)$ und $P_l\left(x_l, y_l\right)$:

$$L_1 = \sqrt{\left(x_s - x_{l,1}\right)^2 + \left(y_s - y_{l,1}\right)^2} \qquad \text{oder} \qquad L_2 = \sqrt{\left(x_s - x_{l,2}\right)^2 + \left(y_s - y_{l,2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |x_s - y_s| \qquad \text{oder} \qquad L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |x_s + y_s|$$

$\Rightarrow$

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left|\frac{b_2 \cdot (1 - a_1) - b_1 \cdot (1 - a_2)}{a_1 - a_2}\right|$$

oder

$$L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left| \frac{b_2 \cdot (1 + a_1) - b_1 \cdot (1 + a_2)}{a_1 - a_2} \right|$$

Gesucht ist der Fall, dass $L = 0$ gilt:

$$b_2 \cdot (1 - a_1) - b_1 \cdot (1 - a_2) = 0 \qquad \text{oder} \qquad b_2 \cdot (1 + a_1) - b_1 \cdot (1 + a_2) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1 - a_2}{1 - a_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1 + a_2}{1 + a_1}$$

Was mit obiger Aussage übereinstimmt.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1 - \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{1 - \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1 + \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{1 + \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_y - \rho_{xy} \cdot \sigma_x}{\sigma_x - \rho_{xy} \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_y + \rho_{xy} \cdot \sigma_x}{\sigma_x + \rho_{xy} \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Damit ist ein Gütekriterium definiert.

$$\frac{1 + a_2}{1 + a_1} - \frac{1 - a_2}{1 - a_1} = \beta \to 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = \beta \to 0$$

Was ideal für $a_1 = a_2$ ist und näherungsweise für $a_1 \to \pm\infty$ bei endlichem a_2.

2.3 Winkelhalbierende y_w

In engen Grenzen kann man eine Berechnungsgrundlage der Winkelhalbierenden y_w zwischen y_1 und y_2 angeben.

$$\tan \alpha_1 = a_1 \qquad \tan \alpha_2 = a_2$$

$\Rightarrow$

$$a_w = \tan \gamma = \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + \sqrt{1 + \tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

Mit:

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{a_1 + a_2}{1 - a_1 \cdot a_2}$$

Gültig bei:

$$a_1 \cdot a_2 < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha_1 + \alpha_2 < +\frac{\pi}{2}$$

Damit ist die Winkelhalbierende vollständig definiert.

$$y_w = a_w \cdot (x - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_w = a_w \cdot x + \underbrace{y_s - a_w \cdot x_s}_{b_w}$$

Wobei b_w die Inhomogenität darstellt.

2.4 Schnittpunkt P_w

Gesucht sind die Schnittpunkte ${}_1P_w$ und ${}_2P_w$ der Winkelhalbierenden y_w mit den Quadrantenhalbierenden $y = +x$ und $y = -x$.

$$+{}_1x_w = a_w \cdot ({}_1x_w - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_1x_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 - a_w} \qquad {}_1y_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 - a_w}$$

$\Rightarrow$

$${}_1x_w = +\frac{b_w}{1 - a_w} \qquad {}_1y_w = +\frac{b_w}{1 - a_w}$$

Sowie:

$$-{}_2x_w = a_w \cdot ({}_2x_w - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_2x_w = -\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 + a_w} \qquad {}_2y_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 + a_w}$$

$\Rightarrow$

$${}_2x_w = -\frac{b_w}{1 + a_w} \qquad {}_2y_w = +\frac{b_w}{1 + a_w}$$

Damit ist das Produkt $F_1 = {}_1x_w \cdot {}_1y_w$ im Grundzustand positiv und $F_2 = {}_2x_w \cdot {}_2y_w$ negativ.

2.5 Fehlerfläche F

Gegeben ist eine Fehlerfläche F.

$$F = F_1 + F_2$$

$\Rightarrow$

$$F = \frac{(y_s - a_w \cdot x_s)^2}{(1 - a_w)^2} - \frac{(y_s - a_w \cdot x_s)^2}{(1 + a_w)^2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \frac{b_w^2}{(1 - a_w)^2} - \frac{b_w^2}{(1 + a_w)^2}$$

Diese Fläche F soll im Betrag minimiert werden.

F wird Null dann, wenn:

• Die Zähler Null werden:

$$b_w = 0 \rightarrow {}_0a_w = \frac{y_s}{x_s}$$

Die Winkelhalbierende y_w läuft durch den Koordinatenursprung.

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot (x - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$

• Die Nenner Eins werden:

$$a_w = 0$$

$\Rightarrow$

$$\tan \gamma = 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\tan \alpha_1 = -\tan \alpha_2$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = -a_2$$

• F ein lokales Minimum annimmt:[1]

Es gibt ein reelwertiges Extrema bei:

$${}_Ea_w = \frac{\sqrt[3]{T} + y_s}{x_s} + \frac{y_s^2 - x_s^2}{x_s \cdot \sqrt[3]{T}}$$

Mit:

$$T = (y_s - x_s) \cdot (x_s + y_s)^2$$

[1] Praktisch uninteressant.

2.6 Idealfall

• Die Inhomogenität b_w

Aus den vorangegangenen Abschnitten gilt ideal:

$$b_w = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_s = x_s$$

Dann, wenn:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1-a_2}{1-a_1} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1+a_2}{1+a_1}$$

• Der Anstieg a_w

Aus den vorangegangenen Abschnitten gilt ideal:

$$a_w = 1$$

$\Rightarrow$

$$\tan\gamma = 1 = \tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\cot\alpha_1 = \tan\alpha_2$$

$\Rightarrow$

$$a_1 \cdot a_2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{xy}^2 = 1$$

• Zusammenfassung beider:

$$\frac{b_1}{b_2} = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = -a_2$$

Oder:

$$\frac{b_1}{b_2} = +a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = +a_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_1}{b_2} = \pm\rho_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \pm\rho_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

3 Zusammenfassung

• Der Schnittwinkel zwischen y_1 und y_2.

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = \left|\frac{\rho_{xy}}{1+\rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\right|$$

• Der Schnittpunkt $P_s\left(x_s, y_s\right)$ beider Funktionen.

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

$\Rightarrow$

$$y_{s,1} = a_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = a_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_2$$

• Das Gütekriterium β.

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = 2 \cdot \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 - \rho_{xy}^2 \cdot \sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 2 \cdot a_2 \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 - \rho_{xy}^2 \cdot \sigma_y^2}$$

Für $\rho_{xy} = \pm 1$:

$$\beta = 2 \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$\beta_0 = -2 \cdot a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2}$$

$\Rightarrow$

$$|\beta_0| \propto \left|a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2}\right| = \left|\rho_{xy} \cdot \frac{1 - \rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2 \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}\right|$$

Die Forderung $\beta_0 = 0$ ist erfüllt für $a_1 = 0$ [2] und $a_1 \cdot a_2 = 1$.

• Die Winkelhalbierende y_w.

$$y_w = a_w \cdot (x - x_s) + y_s$$

Mit:

$$a_w = \tan\gamma = \tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\tan\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}{1 + \sqrt{1 + \tan^2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}}$$

Mit:

$$\tan\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = \frac{a_1 + a_2}{1 - a_1 \cdot a_2} = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = D \cdot E$$

Unter engen Randbedingungen.

• Die Winkelhalbierende ${}_0y_w$ ohne Inhomogenität.

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$

• Idealbedingungen.

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = -a_2$$

Oder:

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = +a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = +a_2$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{xy}^2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

[2] Praktisch uninteressant.

4 Beispiel

4.1 Basiswerte nichtinvertiert

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
128	100	1	16 384	12 800	321 489	121 627
256	250	2	65 536	64 000	192 721	39 502
440	510	3	193 600	224 400	65 025	3 752
640	160	4	409 600	102 400	3 025	83 376
768	400	5	589 824	307 200	5 329	2 377
896	520	6	802 816	465 920	40 401	5 077
1 152	750	7	1 327 104	864 000	208 849	90 752
1 280	900	8	1 638 400	1 152 000	342 225	203 627
5 560	3 590	8	5 043 264	3 192 720	1 179 064	550 090

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_1 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 5560 \cdot 3590}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{5581360}{9432512} = 0,5928$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{5043264 \cdot 3590 - 3192720 \cdot 5560}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{353794560}{9432512} = 37,5079$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_x = 383,90$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_y = 262,22$$

$\Rightarrow$

$$_1\rho_{xy} = a_1 \cdot \frac{_1\sigma_x}{_1\sigma_y} = 0,5928 \cdot \frac{383,90}{262,22} = 0,866$$

4.2 Basiswerte invertiert

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
100	128	1	10 000	12 800	121 627	321 489
250	256	2	62 500	64 000	39 502	192 721
510	440	3	260 100	224 400	3 752	65 025
160	640	4	25 600	102 400	83 376	3 025
400	768	5	160 000	307 200	2 377	5 329
520	896	6	270 400	465 920	5 077	40 401
750	1 152	7	562 500	864 000	90 752	208 849
900	1 280	8	810 000	1 152 000	203 627	342 225
3 590	5 560	8	2 161 100	3 192 720	550 090	1 179 064

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_2 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 3590 \cdot 5560}{2161100 \cdot 8 - 3590^2} = \frac{5581360}{4400700} = 1,2683$$

$\Rightarrow$

$$b_2 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{2161100 \cdot 5560 - 3192720 \cdot 3590}{261100 \cdot 8 - 3590^2} = \frac{553851200}{4400700} = 125,855$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_x = 262,22$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_y = 383,90$$

$\Rightarrow$

$${}_2\rho_{xy} = a_2 \cdot \frac{{}_2\sigma_x}{{}_2\sigma_y} = 1,2683 \cdot \frac{262,22}{383,90} = 0,866$$

4.3 Erweiterte Werte

$$\rho_{xy} = {}_1\rho_{xy} = {}_2\rho_{xy} = 0,866$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_x = {}_1\sigma_x = {}_2\sigma_y = 383,90$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_y = {}_1\sigma_y = {}_2\sigma_x = 262,22$$

$\Rightarrow$

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = \left|\frac{0,5928 - 1,2683}{1 + 0,5928 \cdot 1,2683}\right| = 0,3856$$

$\Rightarrow$

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = 2 \cdot \frac{1,2683 - 0,5982}{1 - 0,5928^2} = 2,083$$

$\Rightarrow$

$$x_s = -130,788 \qquad y_s = -40,023$$

$\Rightarrow$

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{0,5928 + 1,2683}{1 - 0,5928 \cdot 1,2683} = 7,5$$

$\Rightarrow$

$$a_w = \tan\gamma = \tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{7,5}{1 + \sqrt{1 + 7,5^2}} = 0,8755$$

Wobei:

$$a_1 \cdot a_2 = 0,5928 \cdot 1,2683 = 0,7518 < 1$$
$$-1,5707 = -\frac{\pi}{2} < \arctan 7,5 = 1,438 < +\frac{\pi}{2} = +1,5707$$

$\Rightarrow$

$$y_w = 0,8755 \cdot x + 74,482$$

$\Rightarrow$

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = \frac{-40,023}{-130,788} \cdot x = 0,306 \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$
$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = a_2$$

$\Rightarrow$

$$0,752 <> 1 \qquad 0,298 <> 0,5982 \qquad 3,355 <> 1,2683$$

Sowie:

$$\rho_{xy}^2 = 0,75 \neq 1$$

Und:

$$|\beta_0| = 0,227 \neq 0$$

5 Beispiel - Idealfall

5.1 Basiswerte nichtinvertiert

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
1	-0,5	1	1	-0,5	1	0,25
2	0	2	4	0	0	0
3	+0,5	3	9	+1,5	1	0,25
6	0	3	14	+1	2	0,5

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_1 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{1 \cdot 3 - 6 \cdot 0}{14 \cdot 3 - 6^2} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{14 \cdot 0 - 1 \cdot 6}{14 \cdot 3 - 6^2} = \frac{-6}{6} = -1$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{2}{3} = 0,667$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_x = 0,8165$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,5}{3} = 0,167$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_y = 0,4082$$

$\Rightarrow$

$${}_1\rho_{xy} = a_1 \cdot \frac{{}_1\sigma_x}{{}_1\sigma_y} = 0,5 \cdot \frac{0,8165}{0,4082} = 1$$

5.2 Basiswerte invertiert

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
-0,5	1	1	0,25	-0,5	0,25	1
0	2	2	0	0	0	0
+0,5	3	3	0,25	+1,5	0,25	1
0	6	3	0,5	+1	0,5	2

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_2 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{1 \cdot 3 - 0 \cdot 6}{0,5 \cdot 3 - 0^2} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$\Rightarrow$

$$b_2 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{0,5 \cdot 6 - 1 \cdot 0}{0,5 \cdot 3 - 0^2} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,5}{3} = 0,167$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_x = 0,4082$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{2}{3} = 0,667$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_y = 0,8165$$

$\Rightarrow$

$$_2\rho_{xy} = a_2 \cdot \frac{_2\sigma_x}{_2\sigma_y} = 2 \cdot \frac{0,4082}{0,8165} = 1$$

5.3 Erweiterte Werte

$$\rho_{xy}^2 = 1^2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_1 \cdot a_2 = 0,5 \cdot 2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = 2 \cdot \frac{2 - 0,5}{1 - 0,5^2} = 4$$

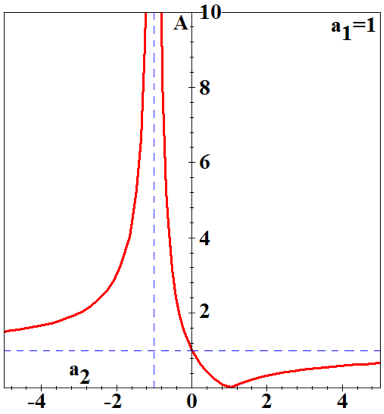
$\Rightarrow$

$$|\beta_0| = \left| a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2} \right| = \left| 0,5 \cdot \frac{1 - 0,5 \cdot 2}{1 - 0,5^2} \right| = 0$$

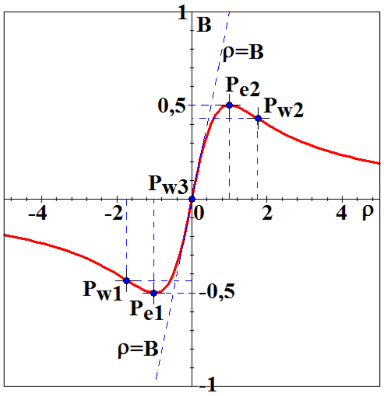
6 Anhang

6.1 Allgemeine Terme

• **Term** A



• **Term** B



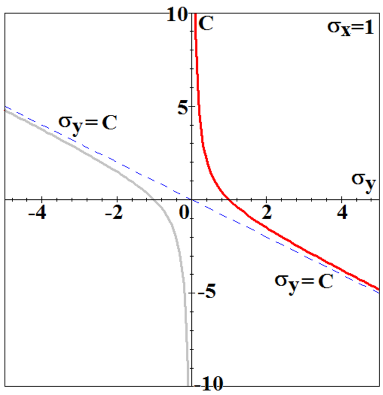
⇒

$$P_{e,1} = \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \qquad P_{e,2} = \left(+1; +\frac{1}{2}\right)$$

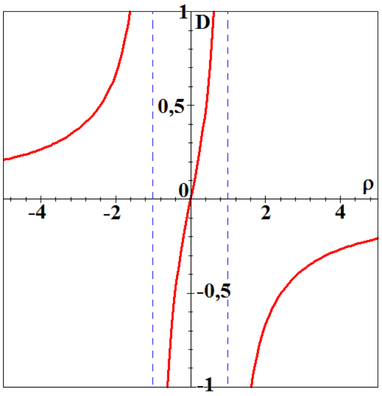
⇒

$$P_{w,1} = \left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right) \qquad P_{w,3} = (0; 0) \qquad P_{w,2} = \left(+\sqrt{3}; +\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

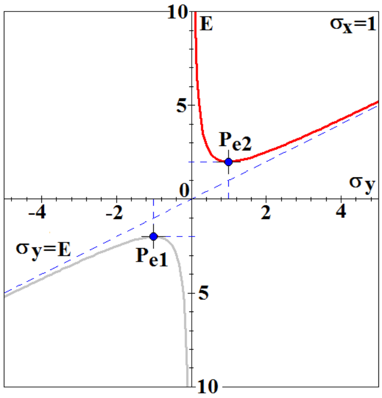
• **Term** C



- **Term** D



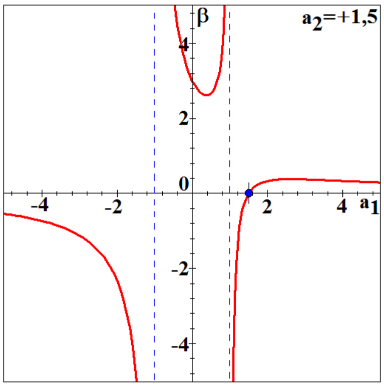
- **Term** E

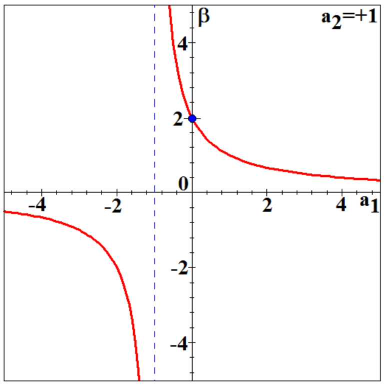


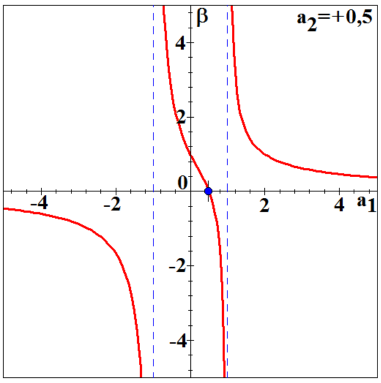
$\Rightarrow$

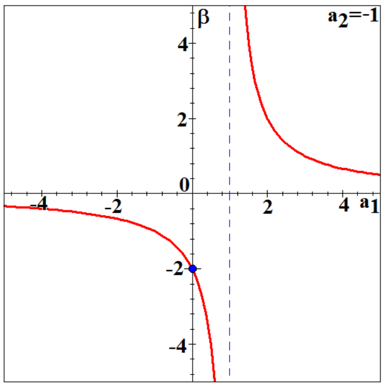
$$P_{e,1} = (-1; -2) \qquad\qquad P_{e,2} = (+1; +2)$$

6.2 Gütekriterium β

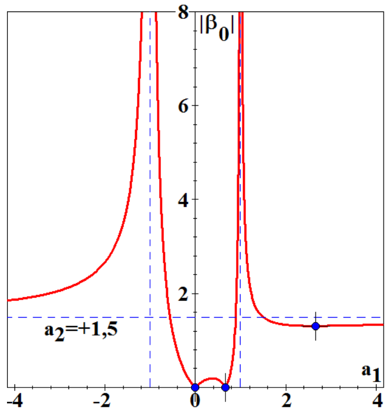


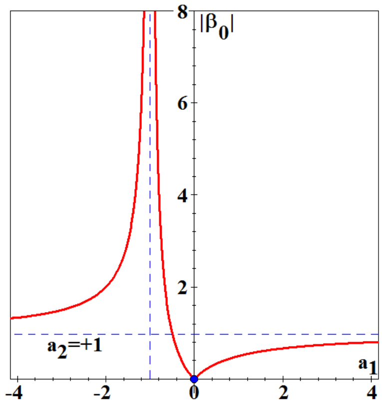


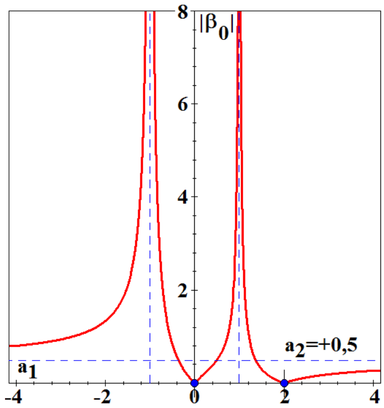


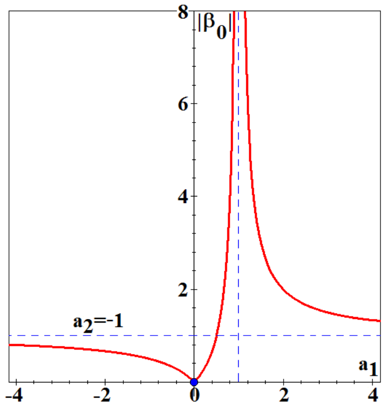


6.3 Gütekriterium $|\beta_0|$









LaTeX 2_ε