

Die Biegelinie und deren Ableitungen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 28. November 2012 – Letzte Revision: 4. April 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Einheiten der Ableitungen	3
3	Die 0. Ableitung der Biegelinie $w(x)$	4
4	Grafische Darstellung der Ableitungen der Biegelinie in Abhängigkeit von x	5
5	Grafische Darstellung der Ableitungen der Biegelinie in Abhängigkeit von F	8
6	Vergleich Theorie III. Ordnung und III. Ordnung mit vereinfachten Berechnungsgrundlagen	11
7	Zusammenfassung	12

Literatur

[Zin12] Björnstjerne Zindler. Die Verformungstheorien I., II. und III. Ordnung, 2012.

1 Einleitung

Einleitung

[Zin12]

Als Fortsetzung von „Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung“ soll im Folgenden ein wenig auf das Wesen und die Erscheinung der Biegelinie und dessen Ableitungen eingegangen werden. Unabhängig von der Ordnung der Theorie gilt grundsätzlich:

- **0. Ableitung** – Die Gleichung der Biegelinie ¹

$$w = w(x) = {}_{I,II,III}w(x)$$

- **1. Ableitung** – Die Gleichung der Neigung der Stabachse

$$w' = \varphi(x) = {}_{I,II,III}w'(x)$$

- **2. Ableitung** – Die Gleichung der Momentenlinie

$$w'' = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w''(x)$$

- **3. Ableitung** – Die Gleichung der Querkraftlinie

$$w''' = -\frac{V(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w'''(x)$$

- **4. Ableitung** – Die Gleichung der Belastungsfunktion

$$w'''' = \frac{g(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w''''(x)$$

Aus [Zin12] sind die 0. Ableitungen der Biegelinie für die Ordnungen I. bis III. bekannt, die im weiteren Verlauf ausgewertet werden sollen.

¹Formelzeichen mit einer Vorfußnote der Form ${}_{I,II,III}$ beziehen sich auf die Berechnungsgrundlagen von [Zin12].

2 Die Einheiten der Ableitungen

Durch das Differenzieren nach $\frac{d}{dx}$ ergibt sich folgende Einheitenkette.

Einheiten

$$[w(x)] = mm^1$$

⇒

$$[w'(x)] = mm^0$$

⇒

$$[w''(x)] = mm^{-1}$$

⇒

$$[w'''(x)] = mm^{-2}$$

⇒

$$[w''''(x)] = mm^{-3}$$

Die Schnittgrößen und die Belastungsfunktion erhalten damit folgende Einheiten.

$$[M(x)] = [-w''(x) \cdot E \cdot I] = mm^{-1} \cdot Nmm^{-2} \cdot mm^4 = Nmm$$

Und:

$$[V(x)] = [-w'''(x) \cdot E \cdot I] = mm^{-2} \cdot Nmm^{-2} \cdot mm^4 = N$$

Sowie:

$$[g(x)] = [w''''(x) \cdot E \cdot I] = mm^{-3} \cdot Nmm^{-2} \cdot mm^4 = Nmm^{-1}$$

3 Die 0. Ableitung der Biegelinie $w(x)$

0. Ableitung

Auf die Herleitung wird nicht noch einmal eingegangen, ebenso auf die Bedeutung der Formelzeichen hier im Kontext. Sie ist/sind in oben genannter Abhandlung nachzulesen. Zusammengefasst genannt gilt:

$$Iw(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

⇒

$$IIw(x) = II\chi \cdot \varepsilon \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{II\chi \cdot \varepsilon} - \tan\left(\frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1\right) \right)$$

Mit:

$$II\chi = \sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

⇒

$$IIIw(x) = III\chi \cdot \varepsilon \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{III\chi \cdot \varepsilon} - \tan\left(\frac{e}{III\chi \cdot \varepsilon}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1\right) \right)$$

Mit:²

$$III\chi = \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}} \quad \varphi = \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \frac{2 \cdot L + e}{2} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

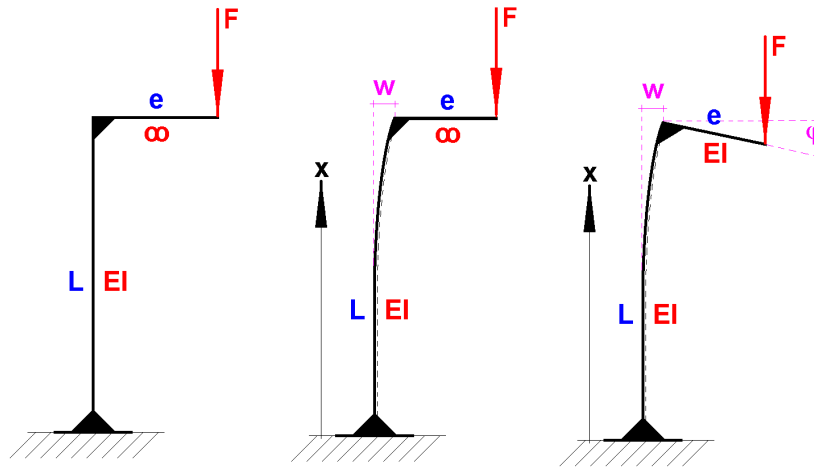


Abbildung 1: Das Modell zwecks Berechnung der Schnittgrößen nach Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung aus „Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung“

²Beim Übergang von der Theorie II. zu Theorie III. Ordnung wird laut [Zin12] die Exzentrizität e durch $e \cdot \cos \varphi$ substituiert. In der Berechnungsgrundlage von φ selbst ist e ebenfalls enthalten, wurde jedoch dort nicht ersetzt. Der Grund ist der Erhalt der analytischen Berechenbarkeit der Theorie III. Ordnung. Der Einsatz eines $III\varphi$ hätte eine transzendente Gleichung induziert, welche numerische Methoden erfordert hätte. Hier wurde bewusst aus methodischen Gründen auf die Substitution von e verzichtet mit all ihren Konsequenzen.

4 Grafische Darstellung der Ableitungen der Biegelinie in Abhängigkeit von x

- **0. Ableitung** – Die Gleichung der Biegelinie

Abhängigkeiten I

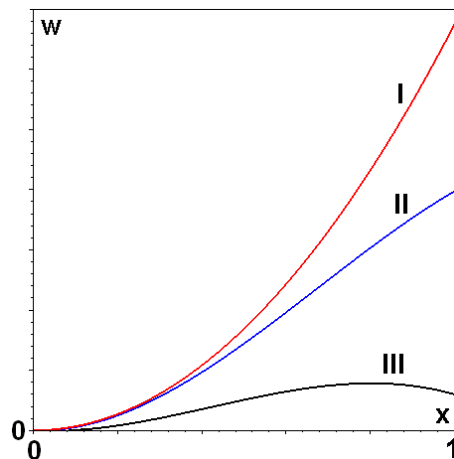


Abbildung 2: Die Gleichung der Biegelinie in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Wie zu sehen, ist die Randbedingung $w(0) = 0$ bei allen drei Ordnungen erfüllt. Die zweite wichtige Randbedingung $w'(L)$ nur von der Theorie III. Ordnung. Der im Abbild dargestellte Graf der III. Ordnung wäre unter den gegebenen Prämissen die Form, welcher der außermittig gedrückte Stab annehmen wird (siehe dazu [Zin12]).

- **1. Ableitung** – Die Gleichung der Neigung der Stabachse

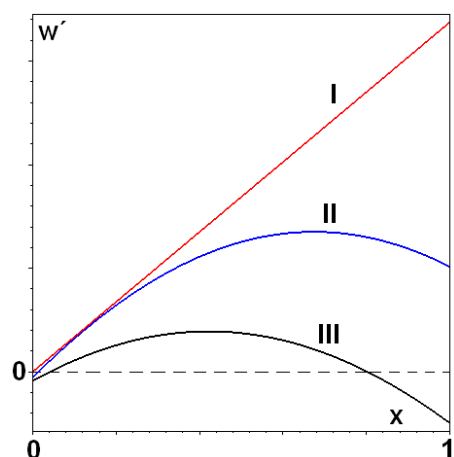


Abbildung 3: Die Gleichung der Neigung der Stabachse in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Wie zu sehen ist die Randbedingung $w'(0) = 0$ exakt nur von der Theorie I. Ordnung erfüllt. Leichte Abweichungen bei den Theorien höherer Ordnungen.

• **4. Ableitung** – Die Gleichung der Belastungsfunktion

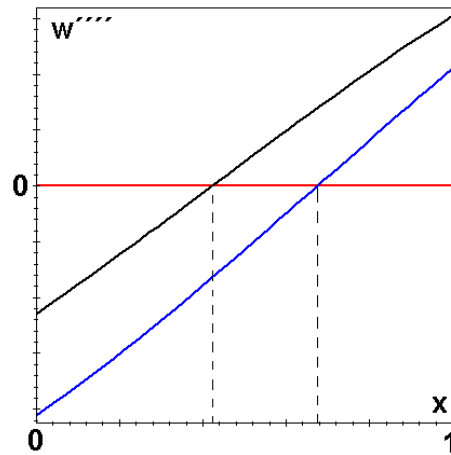


Abbildung 6: Die Gleichung der Belastungsfunktion in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Diese Ableitung liefert eine Ersatzbelastung als Flächenlast für den Stab bei vorliegender Biegelinie. Mit ihr kann in einem Stabwerk ein konsistentes Belastungssystem „erzeugt“ werden, um z. B. den Gesamtrechnenaufwand zu vermindern.

5 Grafische Darstellung der Ableitungen der Biegelinie in Abhängigkeit von F

- **0. Ableitung** – Die Gleichung der Biegelinie

Abhängigkeiten II

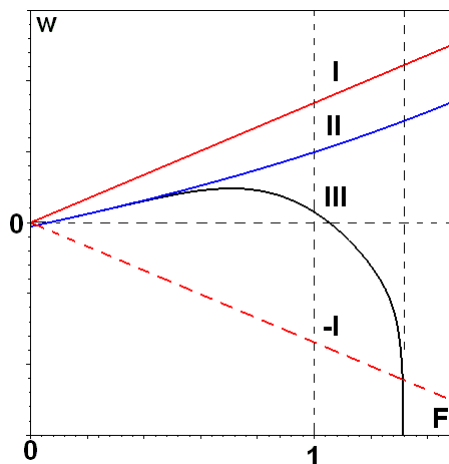


Abbildung 7: Die Gleichung der Biegelinie in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $x = L$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Vorliegende Abbildung zeigt den Wert von w an der Stelle $x = L$ (entspricht der biegesteifen Ecke). Bis zu einer Kraft $F = 1$ und etwas darüber liegen sämtliche Werte für w im positiven Quadranten. Danach kommt es zum plötzlichen Abfall des Funktionsgraphen der Theorie III. Ordnung um bei $1,33 \cdot F$ ein totales Systemversagen anzuzeigen. Die I. und II. Theorie zeigen keinen Ausfall an.

- **1. Ableitung** – Die Gleichung der Neigung der Stabachse

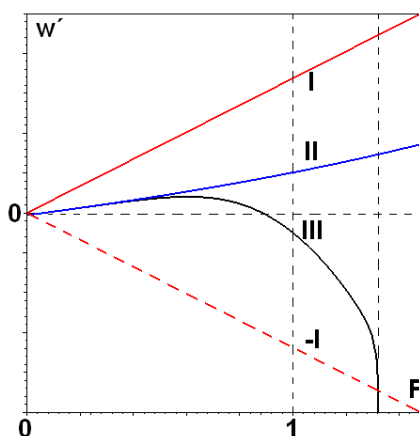


Abbildung 8: Die Gleichung der Neigung der Stabachse in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Die Schiefstellung der Stabachse nach Theorie III. Ordnung ist bis $0,5 \cdot F$ äquivalent der Theorie II. Ordnung (die Stabdrehung folgt der Imperfektion w_0). Danach ist das $E \cdot I$ des Stiels nicht mehr in der Lage, das $\cos \varphi$ infolge der Kraft F klein zu halten und folgt der Kraft, um bei $1,33 \cdot F$ völlig zu versagen.

• **2. Ableitung** – Die Gleichung der Momentenlinie

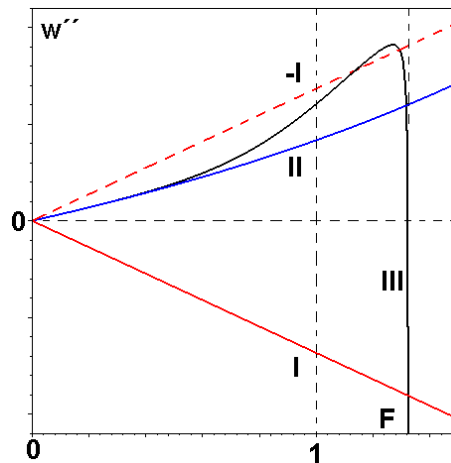


Abbildung 9: Die Gleichung der Momentenlinie in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Der Wert des Momentes $M(L)$ (biegesteife Ecke) zeigt in der Theorie I. Ordnung negative Werte, die II. und III. Ordnung positive. Betragsmäßig zeigt die Theorie III. Ordnung kurz vor dem Versagensfall eine Momentenspitze, die größer ist, als der Wert von I. Ordnung.

• **3. Ableitung** – Die Gleichung der Querkraftlinie

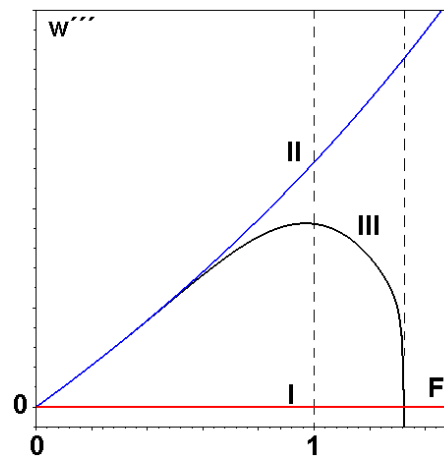


Abbildung 10: Die Gleichung der Querkraftlinie in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Der Wert der Querkraft $V(L)$ für Theorie I. Ordnung beträgt Null für alle F , in Folge dass das Moment am Stiel im vorliegenden Berechnungsmodell konstant ist. Laut Theorie III. Ordnung ist die Querkraft lokal maximal für $F = 1$ mit positiven Werten, im Versagensfall global minimal.

• **4. Ableitung** – Die Gleichung der Belastungsfunktion

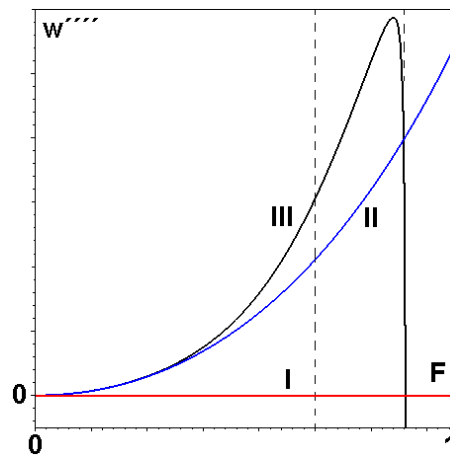


Abbildung 11: Die Gleichung der Belastungsfunktion in Abhängigkeit von x für die Ordnung I. bis III. mit folgenden Werten: $F = 1$ und $E \cdot I = 0.988$ und $e = 0.667$ und $w_0 = 0.015$ und $L = 1$.

I. Ordnung, II. Ordnung, III. Ordnung

Wie erwartet der ähnliche Verlauf der Belastungsfunktion wie der Graf der Momentenlinie, sowie, dass Theorie I. Ordnung den Wert Null besitzt über alles.

6 Vergleich Theorie III. Ordnung und III. Ordnung mit vereinfachten Berechnungsgrundlagen

In der Theorie III. Ordnung darf nicht linearisiert werden. Dennoch kann eine Vereinfachung dadurch erreicht werden, indem Taylorisiert wird. Erfahrungsgemäß sind fünf Glieder (ohne Absolutglied) ausreichend, um Ungenauigkeiten mathematisch abfangen zu können. Zu beachten ist jedoch, dass nur das weitere Vorgehen entscheidend ist, wieviel Glieder **anfänglich** genutzt werden. Wurde z. B. die Biegelinie ausgemessen, ist dessen Graf polynomial regressiert und man möchte die Belastungsfunktion ermitteln, dann muss zwangsläufig vier mal differenziert werden. Bedeutet, dass vier Glieder des Polynoms wegfallen werden, die Ungenauigkeit steigt überproportional. Für vorliegendes Modell ergeben sich folgende Ungenauigkeiten. Alle unteren Polynomisierungsgrade dann folgend als Tabelle.

Vergleich

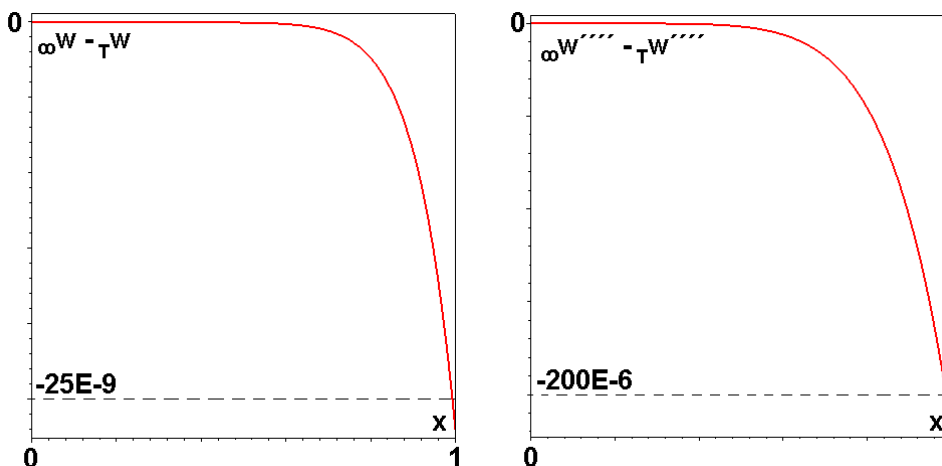


Abbildung 12: Die Abweichung der Berechnungsgrundlagen Theorie III. Ordnung von Theorie III. Ordnung Taylorisiert um $x = 0$ für ein anfängliches Polynom 10. Grades für vorliegendes Modell und $w(x)$ sowie $w''''(x)$. T = Polynomisierungsgrad. ∞ = analytische Form

T	$\alpha = \infty w(x) - T w(x)$	$\beta = \infty w''''(x) - T w''''(x)$	$\approx \alpha - \beta $	$\approx \alpha/\beta \cdot 100\%$
10	- 0, 000 000 025	- 0, 000 2	0, 000 2	0, 013
9	+ 0, 000 000 100	+ 0, 000 4	0, 000 4	0, 025
8	+ 0, 000 003 000	+ 0, 009 0	0, 009 0	0, 034
7	- 0, 000 008 000	- 0, 010 0	0, 010 0	0, 080
6	- 0, 000 200 000	- 0, 180 0	0, 179 8	0, 112
5	+ 0, 000 400 000	+ 0, 055 0	0, 054 6	0, 727
4	+ 0, 008 000 000	+ 1, 000 0	0, 992 0	0, 800
3	- 0, 010 000 000	+ 1, 000 0	0, 990 0	1, 000
2	- 0, 170 000 000	+ 1, 000 0	0, 830 0	17, 00

Tabelle 1: Die Abweichung der Berechnungsgrundlagen Theorie III. Ordnung von Theorie III. Ordnung Taylorisiert um $x = 0$ für Polynome verschiedener Grade für vorliegendes Modell und $w(x)$ sowie $w''''(x)$. T = Polynomisierungsgrad. ∞ = analytische Form

7 Zusammenfassung

Zusammenfassung

Die Nutzung der Biegelinie und dessen Ableitungen zum Zwecke der numerischen und grafischen Schnittgrößenermittlung zeigt deutlich die Eigenschaften und Aussagekraft der Verformungstheorien I. bis III. Ordnung. So ist die Theorie I. Ordnung lediglich für Aussagen auf dem Gebiet der Statik nützlich. Stabilitätsprobleme können jedoch damit nicht betrachtet werden. Wie in den Abbildungen zu sehen, ist die Theorie II. Ordnung für Fragestellungen der Stabilität nur dann geeignet, wenn kleine Verformungen zu erwarten sind, das heißt, nur kleine Kräfte bei großen Systemreserven, ansonsten muss die Verformungstheorie III. Ordnung bemüht werden. Zu beachten, die vereinfachten Berechnungsgrundlagen der Theorie III. Ordnung sind je nach Polynomisierungsgrad nicht immer für grenzwertige Belastungsfälle geeignet.

L^AT_EX