Wie groß kann ein Baum werden?

Dipl. Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 22. Mai 2013 – Letzte Revision: 9. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

1.1 Vorbetrachtungen

[001] Einleitung

Wie groß kann ein Baum werden? Eine einfache Frage, die Antwort ist doch: “So hoch er wachsen kann.” Ergibt sich dann wiederum die Frage, wie hoch er nun wachsen könne, bis zu dem Zeitpunkt, wo mit bestem Willen kein Weiterkommen mehr ist. Einsichtig dürfte wohl sein, dass die begrenzenden Faktoren sehr vielfältig sind und nicht monovariant. Deshalb müsste es wohl am Vernünftigsten sein, zuerst eine kleine Einengung der Faktoren vorzunehmen, die den Wuchs eines Baumes begrenzen.

Biologische Faktoren wie:

- maximale Holzproduktion als konstruktives Element (könnte am Ende interessant sein)
- Lebensdauer (unser Baum lebt jetzt per Definition ewig)
- Krankheiten, Parasiten, (hat keine, der Baum ist im wahrsten Sinne des Wortes „kerngesund“)
- ... (diese Gründe sind hier ebenfalls irrelevant)

Umweltfaktoren, wie:

- der Halt im Boden, die Druckfestigkeit dessen (sei hier ideal und ständig ausreichend)
- Wind, Wetter, dünne Luft in großer Höhe, ... (nicht wuchsbehindernd)
- Konkurenten und ähnliches (keine)
- (Platz)Mangel, ... (an nichts soll es fehlen)

Konstruktive Bedingungen, wie:

- dynamisch (kein dynamischer Faktor sei kontraproduktiv)
- statisch (das ist mit Sicherheit von Interesse)

Die Frage ist hier: “Gibt es statisch begrenzende Faktoren und welche könnten das sein?” Als Antwort gibt es drei zu überdenkende, wuchsbegrendende Gründe.

1. Die maximale Knickkraft im Stamm wird überschritten (unser Baum sei aber ein perfekter Pfahlwurzler).
2. Die maximale Druckkraft im Stamm wird überschritten.
3. Die statisch notwendige Volumenzunahme zur betrachteten Wuchshöhe übersteigt eine maximale Volumenproduktion (eigentlich soll die Holzvolumenproduktion nicht begrenzt sein, wie oben beschrieben, aber Polstellen der notwendigen Volumenzunahme sind dennoch zu beachten).

Bevor es zu den Nachweisen geht, ist ein Modell von Baum nötig.

1.2 Modell

Der Einfachheit halber sei ein Baum ein Stab, so wie die Eulerfälle es beschreiben – homogen, isotrop und so weiter. Sicherlich ist das eine starke Idealisierung, aber unser Baum ist ja nun mal ideal. Die Knickkraft 1. Ordnung ist nach Euler definiert durch:

$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{EI}{s^2}$$

Dabei ist E das Elastizitätsmodul des Holzes, I das statische Flächenträgheitsmoment und s die Knicklänge. Die ist definiert als Eulerfall „eingespannt – frei“ und somit $\beta = 2$.

$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{EI}{\beta^2 \cdot L^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{L^2}$$

Der Wert L ist die Höhe des Baumes. Das statische Flächenmoment I ist definiert über den Kreis (nicht Kreisring, da unser Baum isotrop und homogen ist, also nicht hohl, sondern „kerngesund“)

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot R^4$$

$\Rightarrow$

$$F_K = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E}{L^2} \cdot R^4$$

Das Volumen V des Baumes ist wichtig. Dieses ist definiert als langgestreckter Zylinder.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot L$$

Ein Teil des Volumens generiert jene Kraft, welche am freien Ende des Stabes (also oben am Baum) angreift und unter Umständen F_K überschreitet. Dieser Anteil wird von η dargestellt.

$$V_\eta = \eta \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L$$

Holz hat eine Dichte ρ, mit dieser kann ein Volumen in eine Masse überführt werden.

$$m = \rho \cdot V$$

$\Rightarrow$

$$m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L$$

$\Rightarrow$

$$m_\eta = \rho \cdot \eta \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L$$

Die Gewichtskraft F ist damit definiert.

$$F = m \cdot g$$

$\Rightarrow$

$$F = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L \cdot g$$

$\Rightarrow$

$$F_\eta = \rho \cdot \eta \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L \cdot g$$

Wobei g die Erdgeschleunigung ist. Damit wurde das Modell erzeugt, jetzt geht es an die Nachweise.

2 Nachweise

2.1 Knicken

Nachweise

Damit unser Baum nicht abknickt, muss immer und ständig gegeben sein:

$$\frac{F_\eta}{F_K} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$16 \cdot \frac{\rho \cdot \eta \cdot L^3 \cdot g}{\pi^2 \cdot E \cdot R^2} \leq 1$$

Nun kann die maximale Länge eines Baumes ermittelt werden.

$$16 \cdot \frac{\rho \cdot \eta \cdot g}{\pi^2 \cdot E \cdot R^2} \cdot L_{MAX}^3 = 1$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot R^2}{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} \propto \sqrt[3]{R^2}$$

Da sowohl $\sqrt[3]{\circ}$ und $\circ^2$ in ihren Definitionsbereichen streng monoton wachsen, ist $\sqrt[3]{\circ^2}$ ebenfalls streng monoton steigend. Es gibt aus der Sicht der Knicksicherheit kein Grund als Baum nicht in den Himmel zu wachsen.

2.2 Druck

Der Druck an der eingespannten Stelle am Boden infolge Normalkraft wird nachgewiesen. Die Biegespannungen zum Beispiel durch Wind oder Kronenimperfektionen werden nicht betrachtet, unser Baum besitzt so etwas nicht und Wind ist auch keiner. Die Druckspannung ist definiert mit A der gedrückten Fläche.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot R^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma = \rho \cdot L \cdot g$$

Der Nachweis denkbar einfach.

$$\frac{\sigma}{\sigma_{ZUL}} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\rho \cdot L \cdot g}{\sigma_{ZUL}} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} = \frac{\sigma_{ZUL}}{\rho \cdot g}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} \propto \sigma_{ZUL}$$

Das Eigengewicht des Baumes kann demnach begrenzend auf die Wuchshöhe einwirken, wenn das Holz am Fuße des Baumes unter der eigenen Last zerbröselt.

2.3 Volumen

Über L ist ein Zusammenhang mit R und somit auch mit V gegeben. Damit besteht aber die Möglichkeit, dass der Fall auftritt, dass die Zunahme der Höhe $L + \Delta L$ zu einer Polstelle bei $V + \Delta V$ führt. Dies soll jetzt überprüft werden.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot L$$

$\Rightarrow$

$$\Delta V = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta L$$

Der Radius R^2 ist festgelegt durch eine bekannte Berechnungsgrundlage.

$$L_{MAX}^3 \cdot \frac{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}{\pi^2 \cdot E} = R^2$$

$\Rightarrow$

$$\Delta V = L_{MAX}^3 \cdot \frac{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}{\pi \cdot E} \cdot \Delta L$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt[3]{\frac{\Delta V}{\Delta L} \cdot \frac{\pi \cdot E}{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}} = L_{MAX}$$

Der Wert ΔV als die Volumenproduktion von Holz unseres Baumes sei zwar unendlich (was verlangt wird, wird geliefert ...) jedoch begrenzt (... aber kein bisschen mehr), dann ergibt sich jetzt fürL_{MAX}:

$$L_{MAX} = \sqrt[3]{\frac{1}{\Delta L} \cdot \frac{\Delta V \cdot \pi \cdot E}{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} \propto \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta L}}$$

Die Konsequenzen dieser mathematischen Aussage für unseren Baum ist nicht ganz einfach ablesbar. Eines ist klar, für den allerletzten Wachstumsschub unseres Baumes gilt:

$$\Delta L = L_{MAX} - L$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} \propto \frac{1}{\sqrt[3]{L_{MAX} - L}}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX}^4 - L_{MAX}^3 \cdot L = c$$

Wobei c einen streng von Null verschiedenen positiven Wert darstellt.

$$c = \frac{\Delta V \cdot \pi \cdot E}{16 \cdot \rho \cdot \eta \cdot g}$$

Damit ist obiges Polynom 4. Grades erfüllt, wenn:

$$L < L_{MAX}$$

$\Rightarrow$

$$L_{MAX} > L$$

Im Endeffekt bedeutet das nichts anderes, als dass der Baum unbegrenzt wachsen kann.

3 Zusammenfassung

Ist das Wachstum eines Baumes nach oben hin begrenzt? Mit denen in der Einleitung genannten Bedingungen nur dann, wenn der Baum keine Möglichkeit findet, Holz zu produzieren, welches eine so hohe Druckfestigkeit besitzt, dass es sein eigenes Gewicht zu tragen vermag, auch für den Fall eines angestrebten Riesenwuchses. Zusammenfassung

Ebenso können unsere Berge nicht unendlich in die Höhe wachsen. Ab einer bestimmten Höhe ist deren Eigengewicht so hoch, dass sie zurücksinken in die Erdkruste (hydrostatisches Gleichgewicht) und so das Wachstum kompensieren.

LaTeX