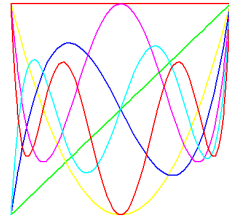


Zernike-Polynome



Kleine Übersicht, Approximation

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 5. Dezember 2018 – Letzte Revision: 12. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht	3
1.1	Darstellungsmöglichkeiten	3
1.1.1	Allgemein	3
1.1.2	Mittels Γ , ${}_2F_1$ und $P_n^{\alpha;\beta}$	4
1.1.3	Produkt	5
1.1.4	Erweitert	6
1.2	Eigenschaften der Radialpolynome	8
1.3	Beschreibung von Wellenfronten	10
1.4	Physikalische Zusammenhänge	11
2	Anwendung in der Approximation	12
2.1	Darstellung von π	12
2.2	Darstellung von $\ln 2$	13
2.3	Verallgemeinerung I	14
2.4	Verallgemeinerung II	15
3	Anhang	17
3.1	Zernikekoeffizienten	17
3.2	Integralwerte I	19
3.3	Integralwerte II	20

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Übersicht

1.1 Darstellungsmöglichkeiten

1.1.1 Allgemein

Nach Frederik „Frits“ Zernike (1888 - 1966) benannte Orthogonalpolynome. Nutzung vor allem in der geometrischen Optik. [001]

Die Polynome können unterschieden werden in gerade und ungerade Zernike-Polynome.

Gerade Polynome

$$Z_n^{(m)}(\rho, \phi) = R_n^{(m)}(\rho) \cdot \cos(m \cdot \phi)$$

Ungerade Polynome

$$Z_n^{(-m)}(\rho, \phi) = R_n^{(m)}(\rho) \cdot \sin(m \cdot \phi)$$

Wobei für m und n gilt:

$$(n \in \mathbb{N}) \geq (m \in \mathbb{N}) \geq 0$$

ϕ wird als azimuthaler Winkel und ρ als der normierte radiale Abstand bezeichnet. Für diese gelten Randbedingungen:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Die Hüllkurve der Trigonometrischen Funktionen, die Radialpolynome $R_n^{(m)}(\rho)$ sind berechenbar über:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)!}{k! \cdot (\frac{n+m}{2}-k)! \cdot (\frac{n-m}{2}-k)!} \cdot \rho^{n-2k} & \text{wenn } \frac{n-m}{2} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Radialpolynom ist nur definiert, wenn der Wert $n - m$ ein gerader ist.

1.1.2 Mittels Γ , ${}_2F_1$ und $P_n^{\alpha;\beta}$

Es existieren weitere Schreibweisen.

Hier für das Radialpolynom:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \frac{\Gamma(n+1) \cdot {}_2F_1\left(-\frac{m+n}{2}; \frac{m-n}{2}; -n; \frac{1}{\rho^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+n-m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2+m+m}{2}\right)} \cdot \rho^n$$

Wobei $\Gamma(z)$ die Gammafunktion und ${}_2F_1(a; b; c; z)$ eine hypergeometrische Funktion darstellt.

Unter gegebenen Randbedingungen kann eine weitere Darstellung angegeben werden mit Hilfe von Jacobi-Polynomen $\mathbf{P}_n^{\alpha;\beta}(\chi)$.

$$R_n^{(m)}(\rho) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot \rho^m \cdot \mathbf{P}_{\frac{n-m}{2}}^{(m;0)}(1-2\rho^2)$$

1.1.3 Produkt

Die Zernike-Polynome können als Produkt von Radialpolynom R und der trigonometrische Funktion G dargestellt werden.

$$Z(\rho, \phi) = R(\rho) \cdot G(\phi)$$

Zu erkennen ist, dass eine Rotation des Zernike-Polynoms um $\phi + \alpha$ nicht die „Form“ des Polynoms $R(\rho)$ ändert.

1.1.4 Erweitert

Gegeben sei das Symbol ε mit:

$$\varepsilon_{m;n} = \begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{wenn } m = 0 ; n \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} = \begin{cases} 2 & \text{wenn } m = 0 ; n \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin die Relation:

$$2 \cdot l + m + n = 4$$

\Rightarrow

$$l = 2 - \frac{m + n}{2}$$

So kann ein Erweitertes Zernike-Polynom $\Phi(\rho; \phi)$ beschrieben werden.

$$\Phi(\rho; \phi) = \frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} \cdot A_{l;m;n} \cdot R_n^{(m)}(\rho) \cdot \cos(m \cdot \phi) \quad \Phi(\rho; \phi) = \frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} \cdot A_{l;m;n} \cdot R_n^{(m)}(\rho) \cdot \sin(m \cdot \phi)$$

\Rightarrow

j	l	n	m	$\frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2}$	$\Phi(\rho; \phi)$
1	2	0	0	1	1
2	1	1	1	1	$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot \cos \phi$
3	1	1	1	1	$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sin \phi$
4	1	2	0	2	$\sqrt{3} \cdot (2 \cdot \rho^2 - 1)$
5	0	2	2	1	$\sqrt{6} \cdot \rho^2 \cdot \sin 2\phi$
6	0	2	2	1	$\sqrt{6} \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\phi$
7	0	3	1	1	$\sqrt{8} \cdot (3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho) \cdot \sin \phi$
8	0	3	1	1	$\sqrt{8} \cdot (3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho) \cdot \cos \phi$
9	-1	3	3	1	$\sqrt{8} \cdot \rho^3 \cdot \sin 3\phi$
10	-1	3	3	1	$\sqrt{8} \cdot \rho^3 \cdot \cos 3\phi$
11	0	4	0	2	$\sqrt{5} \cdot (6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1)$
12	-1	4	2	1	$\sqrt{10} \cdot (4 \cdot \rho^4 - 3 \cdot \rho^3) \cdot \cos 2\phi$
13	-1	4	2	1	$\sqrt{10} \cdot (4 \cdot \rho^4 - 3 \cdot \rho^3) \cdot \sin 2\phi$
14	-2	4	4	1	$\sqrt{10} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4\phi$
15	-2	4	4	1	$\sqrt{10} \cdot \rho^4 \cdot \sin 4\phi$

Der Ausdruck $A_{l;m;n}$ lässt sich für Werte von $j \leq 15$ vereinfacht berechnen durch:

$$A_{l;m;n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n+1} & \text{wenn } \frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} = 2 \\ \sqrt{n+1} & \text{wenn } \frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} = 1 \text{ und } n \in \{0; 1\} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1} & \text{wenn } \frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} = 1 \text{ und } n \in \{2; 3; 4\} \end{cases}$$

\Rightarrow

j	n	$\frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2}$	$A_{l;m;n}$	$\frac{1}{\varepsilon_{m;n}^2} \cdot A_{l;m;n}$
1	0	1	$\sqrt{1}$	$\sqrt{1}$
2	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
3	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	2	2	$\sqrt{3} \cdot 0,5$	$\sqrt{3}$
5	2	1	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
6	2	1	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
7	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
8	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
9	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
10	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
11	4	2	$\sqrt{5} \cdot 0,5$	$\sqrt{5}$
12	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
13	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
14	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
15	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$

Aus dieser Art der Zernike-Polynome werden die in der Optik benutzten abgeleitet, lediglich andere Koeffizienten von A werden genutzt.

1.2 Eigenschaften der Radialpolynome

Die ersten Radialpolynome tabellarisch aufgelistet.

n	m	$n - m$	$\frac{n-m}{2} \in \mathbb{N}$	$R_n^{(m)}(\rho)$
0	0	+0	✓	$R_0^{(0)}(\rho) = 1$
0	1	-1	⊗	$R_0^{(1)}(\rho) = 0$
0	2	-2	⊗	$R_0^{(2)}(\rho) = 0$
0	3	-3	⊗	$R_0^{(3)}(\rho) = 0$
0	4	-4	⊗	$R_0^{(4)}(\rho) = 0$
1	0	+1	⊗	$R_1^{(0)}(\rho) = 0$
1	1	+0	✓	$R_1^{(1)}(\rho) = \rho$
1	2	-1	⊗	$R_1^{(2)}(\rho) = 0$
1	3	-2	⊗	$R_1^{(3)}(\rho) = 0$
1	4	-3	⊗	$R_1^{(4)}(\rho) = 0$
2	0	+2	✓	$R_2^{(0)}(\rho) = 2\rho^2 - 1$
2	1	+1	⊗	$R_2^{(1)}(\rho) = 0$
2	2	+0	✓	$R_2^{(2)}(\rho) = \rho^2$
2	3	-1	⊗	$R_2^{(3)}(\rho) = 0$
2	4	-2	⊗	$R_2^{(4)}(\rho) = 0$
3	0	+3	⊗	$R_3^{(0)}(\rho) = 0$
3	1	+2	✓	$R_3^{(1)}(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$
3	2	+1	⊗	$R_3^{(2)}(\rho) = 0$
3	3	+0	✓	$R_3^{(3)}(\rho) = \rho^3$
3	4	-1	⊗	$R_3^{(4)}(\rho) = 0$
4	0	+4	✓	$R_4^{(0)}(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$
4	1	+3	⊗	$R_4^{(1)}(\rho) = 0$
4	2	+2	✓	$R_4^{(2)}(\rho) = 4\rho^4 - 3\rho^2$
4	3	+1	⊗	$R_4^{(3)}(\rho) = 0$
4	4	+0	✓	$R_4^{(4)}(\rho) = \rho^4$

Eine grundlegende Eigenschaft des Radialpolynoms:

$$R_n^{(m)}(1) = 1$$

Es besteht die Möglichkeit das Radialpolynom aufzusplitten:

$$R_{2n-m}^{(m)}(\rho) = Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m$$

⇒

$$Q_n^{(m)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \cdot \frac{(2n-m-s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-m-s)!} \cdot \rho^{2(n-m-s)}$$

Über $Q(\rho)$ können Wellenfronten dargestellt werden.

Ein Sonderfall von $Q(\rho)$ für $m = 0$.

$$Q_n^{(0)}(\rho) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \cdot \frac{(2n-s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-s)!} \cdot \rho^{2(n-s)}$$

⇒

$$R_{2n}^{(0)}(\rho) = Q_n^{(0)}(\rho)$$

⇒

n	$Q_n^{(0)}(\rho) = R_{2n}^{(0)}(\rho)$
0	1
1	$2\rho^2 - 1$
2	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$
3	$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$
4	$70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$

Eine weitere Eigenschaft des Radialpolynoms:

$$N_n^{(m)} = \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 R_n^{(m)}(\rho) \cdot d\rho$$

⇒

$$\begin{aligned}
 N_0^{(0)} = +1 & & N_1^{(1)} = +1 & & N_2^{(2)} = +1 & & N_3^{(3)} = +1 & & N_4^{(4)} = +1 \\
 & & & & N_2^{(0)} = -1 & & N_3^{(1)} = -1 & & N_4^{(2)} = -1 \\
 & & & & & & & & N_4^{(0)} = +1
 \end{aligned}$$

Dadurch besteht eine Möglichkeit, die Orthogonalität und Normalität von $R(\rho)$ nachzuweisen.

$$\int_0^1 R_{n_1}^{(m)}(\rho) \cdot R_{n_2}^{(m)}(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{1}{2 \cdot (n+1)} \cdot \delta_{n_1; n_2}$$

Die Zernike-Polynome sind Orthogonalpolynome.

1.3 Beschreibung von Wellenfronten

Es war oben gezeigt:

$$Q_n^{(m)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \cdot \frac{(2 \cdot n - m - s)!}{s! \cdot (n - s)! \cdot (n - m - s)!} \cdot \rho^{2 \cdot (n - m - s)}$$

→

$$Q_n^{(0)}(\rho) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \cdot \frac{(2 \cdot n - s)!}{s! \cdot (n - s)! \cdot (n - s)!} \cdot \rho^{2 \cdot (n - s)}$$

Beide Werte werden eingesetzt in:

$$\sum W = \Delta W + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^n Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (B_{n;m} \cdot \cos(m \cdot \phi) + C_{n;m} \cdot \sin(m \cdot \phi)) \right]$$

Unter der Annahme dass $\Delta W = 0$ gilt, ist die Wellenfront definiert.

$$\Delta W_{n;m} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_n \cdot Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^n Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (B_{n;m} \cdot \cos(m \cdot \phi) + C_{n;m} \cdot \sin(m \cdot \phi)) \right]$$

Die polynomialen Koeffizienten A_n ; $B_{n;m}$; $C_{n;m}$ werden individuell vergeben und können je nach Anwender sich unterscheiden. Werden beide hier 1 gesetzt und die einzelne Welle ist erfragt, gilt:

$$\Delta W_{n;m} = Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^n Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (\cos(m \cdot \phi) + \sin(m \cdot \phi))$$

⇒

n	ΔW
0	$\Delta W_{0;m} = Q_0^{(0)}(\rho)$
1	$\Delta W_{1;m} = Q_1^{(0)}(\rho) + Q_1^{(1)}(\rho) \cdot \rho \cdot (\cos \phi + \sin \phi)$
2	$\Delta W_{2;m} = Q_2^{(0)}(\rho) + Q_2^{(1)}(\rho) \cdot \rho \cdot (\cos \phi + \sin \phi) + Q_2^{(2)}(\rho) \cdot \rho^2 \cdot (\cos(2 \cdot \phi) + \sin(2 \cdot \phi))$

⇒

n	ΔW
0	$\Delta W_{0;m} = 1$
1	$\Delta W_{1;m} = 2 \cdot \rho^2 + \rho \cdot (\cos \phi + \sin \phi) - 1$
2	$\Delta W_{2;m} = 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + (3 \cdot \rho^2 - 2) \cdot \rho \cdot (\cos \phi + \sin \phi) + \rho^2 \cdot (\cos(2 \cdot \phi) + \sin(2 \cdot \phi)) + 1$

Ähnlich der Fouriersynthese baut sich für ein $n \rightarrow \infty$ die Funktion der Wellenfront auf.

Abweichungen davon bewirken Wellenfrontfehler in der Optik.

1.4 Physikalische Zusammenhänge

Die Europäischen Einheiten der Optik:

Sphärischer Brechwert	S
Zylindrischer Brechwert	C
Zylinderachse	α

Amerikanische Einheiten der Optik „Power-Vektor-Darstellung - PWD“:

Sphärisches Äquivalent	$S\ddot{A} = S + \frac{1}{2} \cdot C$
Korrigierter Jackson-Kreuzzylinder - Horizontal	$J_0 = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$
Korrigierter Jackson-Kreuzzylinder - Schräg	$J_{45} = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$

⇒

$$C = -2 \cdot \sqrt{J_0^2 + J_{45}^2} \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \frac{J_{45}}{J_0} \quad S = S\ddot{A} - \frac{1}{2} \cdot C$$

Es existiert ein Zusammenhang zwischen der „PWD“ und den Zernike-Polynomen unter Beachtung einiger, hier nicht näher genannter Randbedingungen.

$$\begin{aligned} S\ddot{A} [\text{dpt}] &= -4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{c_0^{(2)}}{\rho^2} [\mu\text{m}] \Rightarrow -4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \frac{(2 \cdot \rho^2 - 1)}{\rho^2} \\ J_0 [\text{dpt}] &= -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{c_2^{(+2)}}{\rho^2} [\mu\text{m}] \Rightarrow -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \cos(2 \cdot \phi) \\ J_{45} [\text{dpt}] &= -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{c_2^{(-2)}}{\rho^2} [\mu\text{m}] \Rightarrow -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \sin(2 \cdot \phi) \end{aligned}$$

2 Anwendung in der Approximation

2.1 Darstellung von π

Folgende Radialpolynome werden zur weiteren Verwendung separiert.

$$\mathbf{R} = R_{n=0 \dots \infty}^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn } n = \text{odd} \end{cases} = R_0^{(0)}; R_1^{(1)}; R_2^{(0)}; R_3^{(1)}; R_4^{(0)}; R_5^{(1)}; R_6^{(0)}; \dots$$

\Rightarrow

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1 \\ 1 \cdot \rho \\ 2 \cdot \rho^2 - 1 \\ 3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho \\ 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1 \\ 10 \cdot \rho^5 - 12 \cdot \rho^3 + 3 \cdot \rho \\ 20 \cdot \rho^6 - 30 \cdot \rho^4 + 12 \cdot \rho^2 - 1 \\ \dots \end{cases}$$

Das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^1 R_{n=0 \dots \infty}^{(m)} \cdot d\rho = \begin{cases} +2/1 \\ 0 \\ -2/3 \\ 0 \\ +2/5 \\ 0 \\ -2/7 \\ \dots \end{cases}$$

besitzt von Null verschiedene Werte nur für $m = 0$, so dass sich die Berechnungsgrundlage für \mathbf{R} weiter vereinfacht.

$$R_n^{(0)}(\rho) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)!}{k! \cdot (\frac{n}{2}-k)! \cdot (\frac{n}{2}-k)!} \cdot \rho^{n-2k} & \text{wenn } \frac{n}{2} \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit:

$$\int_{-1}^1 R_{n=0;2;4;6;\dots;\infty}^{(0)} \cdot d\rho = \frac{2}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

\Rightarrow

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 R_{n=0;2;4;6;\dots;\infty}^{(0)} \cdot d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \cdot (-1)^k = \pi$$

2.2 Darstellung von $\ln 2$

Folgende Radialpolynome werden zur weiteren Verwendung separiert.

$$\mathbf{R} = R_{n=0\dots\infty}^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn } n = \text{odd} \end{cases} = R_0^{(0)}; R_1^{(1)}; R_2^{(0)}; R_3^{(1)}; R_4^{(0)}; R_5^{(1)}; R_6^{(0)}; \dots$$

\Rightarrow

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1 \\ 1 \cdot \rho \\ 2 \cdot \rho^2 - 1 \\ 3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho \\ 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1 \\ 10 \cdot \rho^5 - 12 \cdot \rho^3 + 3 \cdot \rho \\ 20 \cdot \rho^6 - 30 \cdot \rho^4 + 12 \cdot \rho^2 - 1 \\ \dots \end{cases}$$

Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 R_{n=0\dots\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \begin{cases} +1/1 \\ +1/2 \\ -1/3 \\ -1/4 \\ +1/5 \\ +1/6 \\ -1/7 \\ \dots \end{cases}$$

besitzt zwei alternierende (Teil)Folgen der Art:

$$\int_0^1 R_{n=0;2;4;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \begin{cases} +1/1 \\ -1/3 \\ +1/5 \\ -1/7 \\ \dots \end{cases} \quad \int_0^1 R_{n=1;3;5;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \begin{cases} +1/2 \\ -1/4 \\ +1/6 \\ \dots \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\int_0^1 R_{n=0;2;4;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \quad \int_0^1 R_{n=1;3;5;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

\Rightarrow

$$4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 R_{n=0;2;4;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \cdot (-1)^k = \pi$$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 R_{n=1;3;5;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot (-1)^k = \ln 2$$

\Rightarrow

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 R_{n=0;2;4;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 R_{n=1;3;5;\dots;\infty}^{(m)} \cdot d\rho = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{(k+1) \cdot (2k+1)} \cdot (-1)^k$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{(k+1) \cdot (2k+1)} \cdot (-1)^k = \int_1^{\infty} \frac{\arctan k}{k^2} \cdot dk = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \pi \approx 1,131971754$$

2.3 Verallgemeinerung I

Ohne Beweis liegt offensichtlich für das Integral

$$\int_{-1}^{+1} R_{n=m;m+2;m+4;\dots;\infty}^m \cdot d\rho$$

eine Lösung vor.

$$\frac{2}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k+m-2} \quad \text{mit} \quad k = \frac{n-m}{2}$$

Dann ist:

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k+m-2} = (-1)^m \cdot \left(\Psi\left(\frac{1}{4} \cdot (m+3)\right) - \Psi\left(\frac{1}{4} \cdot (m+1)\right) \right)$$

Wobei Ψ die Psi- oder Digamma-Funktion darstellt.

Die ersten Werte aufgelistet:

m		
0	π	+3,14159
1	$-2 \cdot \ln 2$	-1,38629
2	$4 - \pi$	+0,85841
3	$2 \cdot \ln 2 - 2$	-0,61371
4	$\pi - 8/3$	+0,47493
5	$1 - 2 \cdot \ln 2$	-0,38629
6	$52/15 - \pi$	+0,32507
7	$2 \cdot \ln 2 - 5/3$	-0,28037
8	$\pi - 304/105$	+0,24635
9	$7/6 - 2 \cdot \ln 2$	-0,21963

Wobei der Grenzwert für $m \rightarrow \infty$ bei 0 liegt.

2.4 Verallgemeinerung II

Ohne Beweis liegt offensichtlich für das Integral

$$\int_0^{+1} R_{n=m;m+2;m+4;\dots;\infty}^m \cdot d\rho$$

eine Lösung vor.

$$\frac{1}{2k+m+1} \cdot (-1)^k \quad \text{mit} \quad k = \frac{n-m}{2}$$

Dann ist:

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+m+1} \cdot (-1)^k = \frac{4}{m+1} \cdot \mathbf{F} \left(\frac{1}{2}(m+1); \frac{1}{2}(m+3); -1 \right)$$

Wobei \mathbf{F} die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion darstellt.

Die ersten Werte aufgelistet:

m		
0	π	+3,14159
1	$2 \cdot \ln 2$	+1,38629
2	$4 - \pi$	+0,85841
3	$2 - 2 \cdot \ln 2$	+0,61371
4	$\pi - 8/3$	+0,47493
5	$2 \cdot \ln 2 - 1$	+0,38629
6	$52/15 - \pi$	+0,32507
7	$5/3 - 2 \cdot \ln 2$	+0,28037
8	$\pi - 304/105$	+0,24635
9	$2 \cdot \ln 2 - 7/6$	+0,21963

Wobei der Grenzwert für $m \rightarrow \infty$ bei 0 liegt.

3 Anhang

3.1 Zernikekoeffizienten

Angeben sind folgend die Koeffizienten der Zernikepolynome in Abhängigkeit von m und n .

a_9 a_8 ... a_1 a_0	$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n = 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 +1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 0 0 +1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
2	0 0 0 0 0 0 +2 0 -1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
3	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +3 0 -2 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
4	0 0 0 0 0 0 +6 0 -6 0 +1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +4 0 -3 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
5	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 +10 0 -12 0 +3 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 +5 0 -4 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -

Fortsetzung folgt

Fortsetzung

a_9 a_8 ... a_1 a_0	$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	0 0 0 +20 0 -30 0 +12 0 -1	- - - - - - - - - -	0 0 0 +15 -20 0 +6 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 +6 -5 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 +1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -
7	- - - - - - - - - -	0 0 +35 0 -60 0 +30 0 -4 0	- - - - - - - - - -	0 0 +21 0 -30 0 +10 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 +7 0 -6 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 +1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8	0 +70 0 -140 0 +90 0 -20 0 +1	- - - - - - - - - -	0 +56 -105 0 +60 0 -10 0 0	- - - - - - - - - -	0 +28 -42 0 +15 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 +8 0 -7 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 +1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
9	- - - - - - - - - -	+126 0 -280 0 +210 0 -60 0 +5 0	- - - - - - - - - -	+84 0 -168 0 +105 0 -20 0 0 0	- - - - - - - - - -	+36 0 -56 0 +21 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	+9 0 -8 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	+1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

←

$$R_n^{(m)} = a_9 \cdot x^9 + a_8 \cdot x^8 + a_7 \cdot x^7 + a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

3.2 Integralwerte I

Lösungen des Integrals $\int_{-1}^{+1} R_n^{(m)} \cdot d\rho$

	m = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n = 0	+2/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-	-
n = 1	-	0/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-
n = 2	-2/3	-	+2/3	0/1	0/1	-	-	-	-	-
n = 3	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1	-	-	-	-
n = 4	+2/5	-	-2/5	-	+2/5	0/1	0/1	-	-	-
n = 5	-	0/1	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1	-	-
n = 6	-2/7	-	+2/7	-	-2/7	-	+2/7	0/1	0/1	-
n = 7	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1
n = 8	+2/9	-	-2/9	-	+2/9	-	-2/9	-	+2/9	0/1
n = 9	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1

3.3 Integralwerte II

Lösungen des Integrals $\int_0^{+1} R_n^{(m)} \cdot d\rho$

- Für $n = 0; 2; 4; \dots; 2k$ gilt:

$$\int_{-1}^0 R_n^{(m)} \cdot d\rho = + \int_0^{+1} R_n^{(m)} \cdot d\rho$$

- Für $n = 1; 3; 5; \dots; 2k + 1$ gilt:

$$\int_{-1}^0 R_n^{(m)} \cdot d\rho = - \int_0^{+1} R_n^{(m)} \cdot d\rho$$

	m = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n = 0	+1/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-	-
n = 1	-	+1/2	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-
n = 2	-1/3	-	+1/3	0/1	0/1	-	-	-	-	-
n = 3	-	-1/4	-	+1/4	0/1	0/1	-	-	-	-
n = 4	+1/5	-	-1/5	-	+1/5	0/1	0/1	-	-	-
n = 5	-	+1/6	-	-1/6	-	+1/6	0/1	0/1	-	-
n = 6	-1/7	-	+1/7	-	-1/7	-	+1/7	0/1	0/1	-
n = 7	-	-1/8	-	+1/8	-	-1/8	-	+1/8	0/1	0/1
n = 8	+1/9	-	-1/9	-	+1/9	-	-1/9	-	+1/9	0/1
n = 9	-	+1/10	-	-1/10	-	+1/10	-	-1/10	-	+1/10