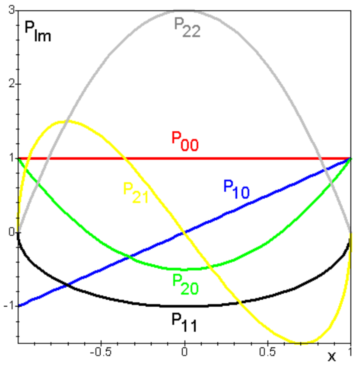
Legendrepolynome



Allgemeine, Zugeordnete, Approximation

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 5. Februar. 2018 – Letzte Revision: 12. April 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Übersicht

1.1 Legendre-Polynome

Gegeben ist die Differentialgleichung (Legendre-Gleichung) folgender Form: [001]

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \left(l\left(l+1\right) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

Nichtsinguläre Lösungen ergeben sich nur für die Randbedingung:

$$x \in [-1; +1]$$

Sowie:

$$l \in N_0 \qquad m \in N_0 \qquad \text{mit} \qquad l \geq m \geq 0$$

Lösung obiger Legendre-Gleichung sind die Legendre-Polynome.

1.2 Gewöhnliche Legendre-Polynome

Die Gewöhnlichen Legendre-Polynome sind berechenbar über[1]:

$$y = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Die ersten Polynome.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \\
P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\
P_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16} \\
P_7(x) &= \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x
\end{aligned}$$

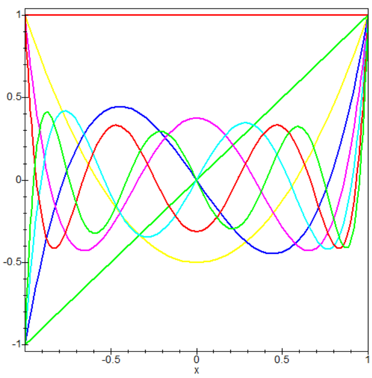
Wobei in der Fachliteratur der Nenner ausgeklammert wird.

$$\begin{aligned}
1 \cdot P_0(x) &= 1 \\
1 \cdot P_1(x) &= x \\
2 \cdot P_2(x) &= 3x^2 - 1 \\
2 \cdot P_3(x) &= 5x^3 - 3x \\
8 \cdot P_4(x) &= 35x^4 - 30x^2 + 3 \\
8 \cdot P_5(x) &= 63x^5 - 70x^3 + 15x \\
16 \cdot P_6(x) &= 231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5 \\
16 \cdot P_7(x) &= 429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x
\end{aligned}$$

Eine besondere Eigenschaften sei genannt.

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} P'_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn} \quad n = \text{odd} \end{cases}$$

Weitere im Abschnitt Approximation



Die oben aufgelisteten Polynome grafisch dargestellt.

[1]Es gibt eine Vielzahl von weiteren Berechnungsvorschriften.

1.3 Zugeordnete Legendre-Polynome

Die Zugeordneten Legendre-Polynome sind definiert durch:

$$y = P_{lm}(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$\Rightarrow$

$$y = P_{lm}(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2-1\right)^l$$

Der Sonderfall mit $m = 0$:

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + l(l+1)\, y = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2-1\right)^l$$

$\Rightarrow$

$$y = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2-1\right)^l$$

$\Rightarrow$

$$P_{l0}(x) = P_l(x)$$

Legendre-Polynome sind orthogonal:

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_{lm}(x)\, P_{km}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk}$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_{lm}(x)\, P_{\ln}(x) \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{mn}$$

$\Rightarrow$

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_{l0}(x)\, P_{k0}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_{l0}(x)\, P_{l0}(x) \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = 1$$

Die ersten zugeordneten Legendre-Polynome lassen sich rekursiv berechnen:

$$(l-m)\, P_l^m(x) = x\,(2l-1)\, P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)\, P_{l-2}^m(x)$$

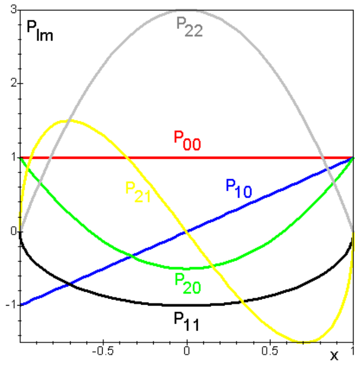
$\Rightarrow$

$$l P_l^0(x) = x\,(2l-1)\, P_{l-1}^0(x) - (l-1)\, P_{l-2}^0(x)$$

Die ersten 6 Polynome:

$$\begin{aligned}
&P_{00}(x) = 1 \\
&P_{10}(x) = x \\
&P_{11}(x) = -\sqrt{1-x^2} \\
&P_{20}(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \\
&P_{21}(x) = -3x\sqrt{1-x^2} \\
&P_{22}(x) = 3\left(1-x^2\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$



Zugeordnete Legendre-Polynome grafisch dargestellt.

Das vorgeschriebene Intervall für x induziert die Nutzung einer trigonometrischen Funktion, dann:

$$x = \cos\vartheta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P_{00}(x) &= 1 \\
P_{10}(x) &= \cos\vartheta \\
P_{11}(x) &= -\sin\vartheta \\
P_{20}(x) &= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) \\
P_{21}(x) &= -3\sin\vartheta\cos\vartheta \\
P_{22}(x) &= 3\sin^2\vartheta
\end{aligned}$$

Für $x = \cos\vartheta$ sind andere zusätzliche Orthogonalitätsbeweise beschrieben.

$$\int\limits_0^\pi |P_{lm}\cos\vartheta|^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta = 1$$

Ein vollständiges Orthogonalsystem auf der Einheitskugel bilden die Kugelflächenfunktionen definiert aus $P_{lm}\cos\vartheta$:

$$Y_{lm}(\vartheta;\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot e^{jm\varphi} \cdot P_{lm}\cos\vartheta$$

Die zugeordnete Legendre-Gleichung jetzt:

$$y'' + \cot\vartheta \cdot y' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] y = 0$$

$\Rightarrow$

$$y'' + \cot\vartheta \cdot y' + l(l+1)\,y = 0$$

1.4 Zugeordnete Legendre-Funktionen 2. Art

Ähnlich wie bei der Legendreschen Gleichung stellen die zugeordneten Legendre-Polynome P_{lm} nur eine Gruppe von Lösungsfunktionen der verallgemeinerten Legendreschen Gleichung dar. Die zugeordneten Legendre-Funktionen 2. Art $Q_{lm}(x)$ stellen ebenso Lösungen dar. Auch für sie gilt $Q_{l0} = Q_l$ mit den Legendre-Funktionen 2. Art $Q_l(x)$.

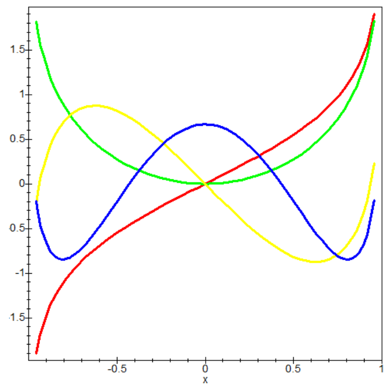
Folgend die ersten Funktionen aufgelistet.

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\
Q_1(x) &= \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}\\
Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{3x}{2}\\
Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
2\cdot Q_0(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x}\\
4\cdot Q_1(x) &= 2x\ln\frac{1+x}{1-x}\\
8\cdot Q_2(x) &= 2\left(3x^2-1\right)\ln\frac{1+x}{1-x}-12x\\
12\cdot Q_3(x) &= 3\left(5x^3-3x\right)\ln\frac{1+x}{1-x}-30x^2+8
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung von $Q_{n=0;1;2;3}(x)$.

2 Anwendung in der Approximation

2.1 Darstellung von π

Gegeben ist folgendes Integral:

$$(-1)^n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} P^2_{n=0;1;2;\ldots;\infty}(x)\,\mathrm{d}x = +\frac{2}{1}; -\frac{2}{3}; +\frac{2}{5}; -\frac{2}{7}; \ldots$$

Dessen Lösungen eine Folge darstellt:

$$(-1)^n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} P^2_{n=0;1;2;\ldots;\infty}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

Wobei gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot (-1)^n = \frac{\pi}{4}$$

Daher:

$$4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} P^2_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \pi$$

2.2 Darstellung von $\ln 2$

Gegeben ist folgendes Integral:

$$(-1)^n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} P'_{n=1;2;3;\ldots;\infty}(x)^2 \mathrm{d}x = -2; +6; -12; +20; \ldots$$

Dessen Lösungen eine Folge darstellt:

$$(-1)^n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} P'_{n=1;2;3;\ldots;\infty}(x)^2 \mathrm{d}x = (-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)$$

Wobei gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot (-1)^n = \frac{1}{2} - \ln 2$$

Daher:

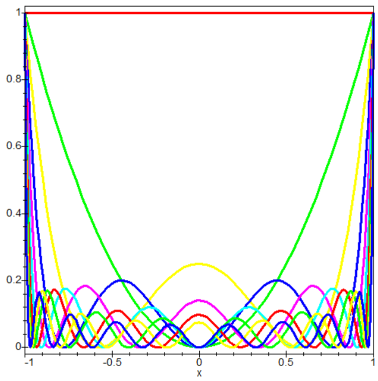
$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \left(\int\limits_{-1}^{+1} P'_n(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{-1} \right) = \ln 2$$

3 Anhang

3.1 Polynome der Form $P_n^2(x)$

$$2 \cdot P_0^2(x) = \left\{ +2 \right.$$
$$2 \cdot P_1^2(x) = \left\{ +2x^2 \right.$$
$$4 \cdot P_2^2(x) = \left\{ +9x^4 - 6x^2 + 1 \right.$$
$$4 \cdot P_3^2(x) = \left\{ +25x^6 - 30x^4 + 9x^2 \right.$$
$$64 \cdot P_4^2(x) = \begin{cases} +1.225x^8 - 2.100x^6 + 1.110x^4 \\ -180x^2 + 9 \end{cases}$$
$$64 \cdot P_5^2(x) = \begin{cases} +3.969x^{10} - 8.820x^8 + 6.790x^6 \\ -2.100x^4 + 225x^2 \end{cases}$$
$$256 \cdot P_6^2(x) = \begin{cases} +53.361x^{12} - 145.530x^{10} + 147.735x^8 \\ -68.460x^6 + 14.175x^4 - 1.050x^2 + 25 \end{cases}$$
$$256 \cdot P_7^2(x) = \begin{cases} +184.041x^{14} - 594.594x^{12} + 750.519x^{10} \\ -466.620x^8 + 147.735x^6 - 22.050x^4 + 1.225x^2 \end{cases}$$
$$16384 \cdot P_8^2(x) = \begin{cases} +41.409.225x^{16} - 154.594.440x^{14} + 233.477.244x^{12} \\ -182.702.520x^{10} + 78.745.590x^8 - 18.304.440x^6 \\ +2.072.700x^4 - 88.200x^2 + 1.225 \end{cases}$$
$$16384 \cdot P_9^2(x) = \begin{cases} +147.744.025x^{18} - 625.739.400x^{16} + 1.100.565.180x^{14} \\ -1.039.878.840x^{12} + 570.143.574x^{10} - 182.702.520x^8 \\ +32.695.740x^6 - 2.910.600x^4 + 99.225x^2 \end{cases}$$

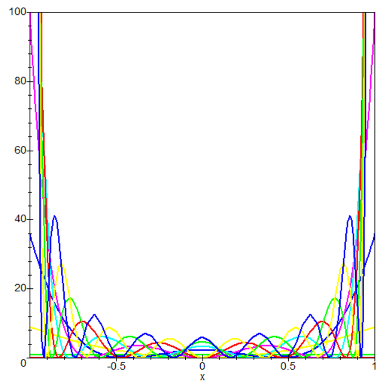
Die grafische Darstellung dazu.



3.2 Polynome der Form $P_n'(x)^2$

$$1 \cdot {P'}_1(x)^2 = \{+1$$
$$1 \cdot {P'}_2(x)^2 = \{+9x^2$$
$$4 \cdot {P'}_3(x)^2 = \{+225x^4 - 90x^2 + 9$$
$$4 \cdot {P'}_4(x)^2 = \{+1.225x^6 - 1.050x^4 + 225x^2$$
$$64 \cdot {P'}_5(x)^2 = \begin{cases} +99.225x^8 - 132.300x^6 + 53.550x^4 \\ -6.300 * x^2 + 225 \end{cases}$$
$$64 \cdot {P'}_6(x)^2 = \begin{cases} +480.249x^{10} - 873.180x^8 + 542.430x^6 \\ -132.300x^4 + 11.025x^2 \end{cases}$$
$$256 \cdot {P'}_7(x)^2 = \begin{cases} +9.018.009x^{12} - 20.810.790x^{10} + 17.681.895x^8 \\ -6.759.060x^6 + 1.135.575x^4 - 66.150x^2 + 1.225 \end{cases}$$
$$256 \cdot {P'}_8(x)^2 = \begin{cases} +41.409.225x^{14} - 115.945.830x^{12} + 125.756.631x^{10} \\ -66.486.420x^8 + 17.681.895x^6 - 2.182.950x^4 + 99.225x^2 \end{cases}$$
$$16.384 \cdot {P'}_9(x)^2 = \begin{cases} +11.967.266.025x^{16} - 39.421.582.200x^{14} + 52.175.623.500x^{12} \\ -35.497.261.800x^{10} + 13.179.716.550x^8 - 2.610.808.200x^6 \\ +248.856.300x^4 - 8.731.800x^2 + 99.225 \end{cases}$$

Die grafische Darstellung dazu.



LaTeX 2_ε