- **Nachweis der Gültigkeit der N- ten ABCD- Matrix:**

…

$$AD - BC = 1 \tag{14.3.3}$$

…

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} A\sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B\sin N\theta \\ C\sin N\theta & D\sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \tag{14.3.5}$$

Das Ergebnis (14.3.5) für eine 2 x 2 Matrix erfüllt (14.3.3) und wird manchmal auch "Sylvesters Theorem" genannt. Es kann durch Induktion bewiesen werden. So gilt (14.3.5) für N = 1 und wir versuchen zu zeigen, dass wenn es für ein festes, beliebiges N gilt, muss es auch für N +1 richtig sein. Wenn wir dies zeigen können, ist das „Sylvester Theorem" bewiesen.

Nehmen wir an, dass (14.3.5) gilt, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A\sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B\sin N\theta \\ C\sin N\theta & D\sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} (A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta & B(A+D)\sin N\theta - B\sin(N-1)\theta \\ C(A+D)\sin N\theta - C\sin(N-1)\theta & (BC + D^2)\sin N\theta - D\sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \tag{14.3.6}$$

Mit (14.3.3) und (14.3.4) sehen wir, dass das (1,1)- Element dieser Matrix ist:

$$(A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta = (A^2 + AD - 1)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta$$

$\Rightarrow$

$$(A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta = A(A+D)\sin N\theta - \sin N\theta - A\sin(N-1)\theta$$

$\Rightarrow$

$$(A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta = 2A\sin N\theta\cos\theta - \sin N\theta - A\sin(N-1)\theta$$

$\Rightarrow$

$$(A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta = 2A\left[\frac{1}{2}\sin(N+1)\theta + \frac{1}{2}\sin(N-1)\theta\right] - \sin N\theta - A\sin(N-1)\theta$$

$\Rightarrow$

$$(A^2 + BC)\sin N\theta - A\sin(N-1)\theta = A\sin(N+1)\theta - \sin N\theta \tag{14.3.7}$$

Die verbleibenden drei Elemente aus (14.3.6) werden analog behandelt. Wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} A\sin(N+1)\theta - \sin N\theta & B\sin(N+1)\theta \\ C\sin(N+1)\theta & D\sin(N+1)\theta - \sin N\theta \end{bmatrix} \tag{14.3.8}$$

Aber das ist nun mal die Gleichung (14.3.5) mit N ersetzt durch N + 1. So gilt (14.3.5) auch für N = 1, und wir haben gerade gezeigt, dass, wenn es gilt für alle N, dann muss es auch richtig sein für N + 1. Dies beweist das Theorem von Sylvester.

- **Nachweis der Gültigkeit von 14. 3. 3 auf 14. 3. 5 und die Transformationsmatrix:**

…

$$A^* D^* - B^* C^* = 1 \tag{14.3.3}$$

…

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \tag{14.3.5}$$

…

Der einfachste Weg dies zu überprüfen ist dadurch möglich, dass man die Strahlenmatrix (14.3.1) betrachtet. So ist diese ein Produkt von vier Matrizen, mit jeweils der Determinante eins. Da die Determinante eines Matrizenprodukts gleich ist dem Produkt der Einzeldeterminanten folgt daraus:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2R_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2R_2^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.3.1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = 1^N$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \begin{vmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \begin{vmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos\theta$$

Was gleichzeitig die folgende Determinante für N $\rightarrow \infty$ erklärt:

$$A^* D^* - B^* C^* = \cos\theta$$

Da für vorliegenden Fall der Drehwinkel „θ“ der Transformationsmatrix Null sein soll, muss gelten:

$$\theta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = 1 \qquad \mathbf{I}$$

$\Rightarrow$

$$A^* D^* - B^* C^* = 1$$

Hinweis:

Die Zulässigkeit der getrennten Betrachtung des Drehwinkels „θ“ der Transformationsmatrix und des Winkels „θ“ der Stabilitätsbedingung ist aus Gründen der Matrixoptik und der Algebra erklärt – siehe dort unter dem Stichwort „Nichttriviale Lösung“.

Gleichzeitig definiert die Determinante die ABCD- Matrix als Drehmatrix (Transformationsmatrix) welche orthogonal ist.

Eine orthogonale Matrix ist in der linearen Algebra, einem Teilgebiet der Mathematik, eine quadratische, reelle Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind. Sie stellen Kongruenzabbildungen, also Spiegelungen und Drehungen, dar. Der analoge Begriff bei komplexen Matrizen ist die unitäre Matrix.

Orthogonale Matrizen, deren Determinante 1 ist, entsprechen Drehungen, orthogonale Matrizen, deren Determinante − 1 ist, entsprechen in der Ebene Spiegelungen an einer Ursprungsgeraden und im Raum Ebenenspiegelungen oder Drehspiegelungen.

...

Die ABCD- Matrix für eine optische Komponente, beschränkt auf vorliegende, lautet allgemein:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B^* \\ C^* & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \frac{A+D}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{A+D}{2} \qquad \mathbf{II}$$

Das definiert den Drehwinkel des Strahles **außerhalb** der Transformationsmatrix.

- **Zusammenhang zwischen Spur der Matrix und dessen Eigenwerten:**

Die ABCD- Matrix ist gegeben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Die **Eigenwerte** sind berechnebar:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\det\begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(A-\lambda)(D-\lambda) - BC = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_{1;2} = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+D)^2}{4} - AD + BC}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + D$$

Die **Spur** ist berechenbar:

$$sp\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = A + D$$

Das ist der allgemeine Zusammenhang zwischen Spur und Eigenwerten einer Matrix „M“.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Sp(M)$$

Aus der Algebra ist für eine Drehmatrix folgende Eigenschaft hergeleitet:

$$Sp(M) = 1 + 2\cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$A + D = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2\cos\theta \qquad \textbf{III}$$

Das definiert den Drehwinkel des Strahles **innerhalb** der Transformationsmatrix.

- **Der Zusammenhang des inneren Drehwinkels der Transformationsmatrix mit dem äußeren:**

Es ist gegeben:

$$\cos\theta = 1 \qquad \textbf{I}$$

$$\cos\theta = \frac{A+D}{2} \qquad \textbf{II}$$

$$A + D = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2\cos\theta \qquad \textbf{III}$$

I und **II** ergeben keinen Widerspruch für die einzelne optische Komponente und sind gültig.

I und **III** ergeben einen (scheinbaren) Widerspruch. Bedenkt man jedoch, dass **I** für den (horizontal) hinlaufenden Strahl gilt:

$$\theta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = 1$$

Dementsprechend gilt für den (horizontal) rücklaufenden Strahl:

$$\theta = \pi \equiv 180°$$

$\Rightarrow$

$$1 + 2\cos\theta = -1$$

Unter Beachtung dieser Tatsache und Beachtung von **I** und **II** lässt sich **III** somit auch erklären über:

$$\frac{A+D}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$A + D = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos\theta \qquad \textbf{III}$$

Damit besteht kein Widerspruch mehr zwischen den getrennt betrachteten Drehwinkeln, die Integrität von 14.3.5 ist wieder hergestellt und nutzbar.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \begin{vmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{vmatrix} \qquad 14.3.5$$

Hinweis:

Die hier vorliegenden Vereinfachungen und Annahmen basieren ausschließlich auf die Randbedingung vorliegender Aufgabenstellung. Streng genommen sind oben angewandte Matrizenoperationen in Hinblick auf die Regeln der Matrizenalgebra nicht allgemeingültig.