

# 14 Laserresonatoren

## 14.1 Einführung

Bis jetzt haben wir lediglich die Annahme getroffen, ein Laserresonator bestehe aus zwei hoch reflektierenden, flachen, parallelen Spiegeln, die in einer Entfernung „L“ voneinander stehen. Die einzige wesentliche Eigenschaft eines solchen Resonators ist bis jetzt, dass sie "in Längsrichtung" Lasermoden trennt in Frequenzen von  $C/2L$ . Wir haben uns bis jetzt nicht darum gekümmert, wie das Feld im Inneren des Resonators in Richtungen quer zu den Verbindungslinien der Zentren beider Spiegel variiert. In der Tat haben wir angenommen, dass das Feld an jeder Stelle gleich, senkrecht in Ebene, zur so genannten optischen Achse sei. In diesem Kapitel gehen wir von realen Laserresonatoren aus. Wir werden einige der wichtigsten Merkmale der tatsächlichen Eigenschaften von Laserresonatoren beschreiben, beginnend mit einem relativ einfachen Ansatz auf der Grundlage der geometrischen Optik und nach und nach arbeiten wir unseren Weg bis zu einer Beschreibung auf Basis der Maxwell-Gleichungen vor.

Die meisten unserer Abhandlungen über Laserresonatoren sind davon ausgegangen, dass das Lasermedium passiv sei. Das heißt, die elektromagnetischen Modi des Laserresonators wurden so angenommen, dass diese gleich seien wie die Modi eines leeren Resonators ohne ein verstärkendes Medium. Dies ist eine gute Näherung, wenn der Verstärungskoeffizient und der Brechungsindex des Mediums im gesamten Medium möglichst gleichmäßig verteilt sind. Das ist natürlich eine nützliche Annäherung, denn es ermöglicht Berechnungen, unabhängig vom Lasermedium. Glücklicherweise ist es oft eine genaue Näherung.

Abbildung 14.1a zeigt ein Lichtstrahl senkrecht zu den Spiegel, ein Resonator mit flachen, parallelen Spiegeln. Der Strahl behält ständig seinen Weg auch nach mehreren aufeinander folgenden Reflexionen zwischen den Spiegeln. Wenn die Spiegel jedoch nicht perfekt parallel sind, die Strahlung wird schließlich aus dem Resonator entweichen, wie in Abbildung 14.1b gezeigt. Die falsch ausgerichteten Resonatoren nach Abbildung 14.1b erfordern einen größeren Gewinn der Laserschwingungen als bei dem Resonator in Abbildung 14.1a.

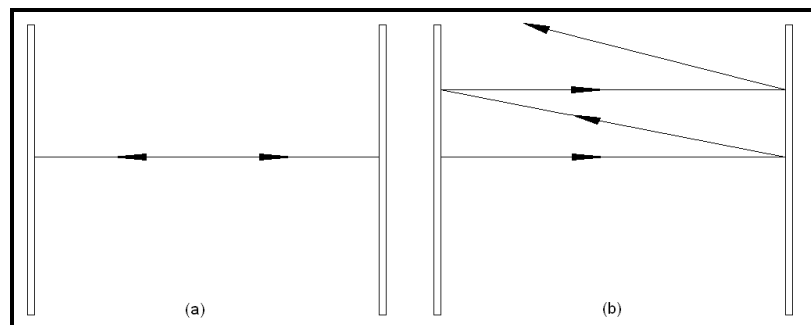


Abbildung 14.1 Ein Laser Resonator mit flachen, parallelen Spiegeln. Ein Lichtstrahl parallel zur optischen Achse bleibt in dem Resonator, wenn die Spiegel perfekt parallel sind (a). Sonst entweichen diese schließlich (b).

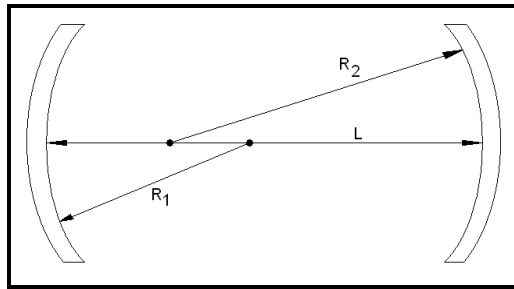


Abbildung 14.2 Ein Laserresonator mit zwei Spiegeln, gegeben durch dessen sphärischen Flächen mit den Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$ .

Wir können davon ausgehen, dass ein Laserstrahl bei flachen Spiegeln selbst bei geringster Fehlstellung dieser irgendwann mal entweicht. Natürlich ist dies nicht wünschenswert, denn wir wollen einen praktisch nutzbaren und dauerhaften Laser. Abbildung 14.2 zeigt eine sehr häufig verwendete Art der Laserresonatoren, bestehend aus Spiegeln mit sphärischer Oberfläche. Dies ist die Art von Resonatoren bei den meisten kommerziell erhältlichen Lasern. In Abschnitt 14.3 werden sehen warum.

## 14.2 Die Strahlenmatrix

In der geometrischen Optik, der Beschreibung der Lichtwellenausbreitung wird der Begriff des Strahls genutzt. Man könnte ein Strahl definieren als die Normale auf jeden Punkt einer Wellenfront, so wie in Abbildung 14.3 gezeigt. Wir werden davon ausgehen, dass die Richtung eines Strahls in Richtung des Energieflusses zeigt. Das ist nicht die physikalische Bedeutung die "Länge" von Strahlung sondern nur die Verdeutlichung der Richtung der Ausbreitung auf einen bestimmten Punkt bezogen. Wenn wir dieses Strahlenbild nutzen ignorieren wir jedoch die Polarisierung des Lichts Welle. Unser Strahlenbild ist eine grobe aber nützliche Darstellung der tatsächlichen Situation.

In diesem Abschnitt werden wir einen einfachen Formalismus für die Strahlenausbreitung erarbeiten. Dieser Formalismus erweist sich als geeignet für die Beschreibung eines Gauß'schen Lasers, wie in Abschnitt 14.5 beschrieben.

Im praktischen Bereich wird im Umgang mit Lichtwellen die Richtung, in die Strahlen sich mehr oder weniger in eine Richtung ausbreiten, als  $z$ - Richtung bezeichnet. Die Strahlen sehen wir in einem Punkt parallel zur  $z$ - Achse vereinigt. Jeder Punkt auf der Welle stellen wir uns vor als ein Strahl, mit seiner seitlichen Verschiebung  $r(z)$ , gemessen relativ zur  $z$ - Achse, und sein Winkel  $r'(z)$  (siehe Abbildung 14.4).

$$r'(z) = \frac{d}{dz} r(z) \quad (14.2.1)$$

Aufgrund der Annahme, der fast unidirektional Ausbreitung der Strahlung entlang der  $z$ - Achse, wird der Winkel  $r'(z)$  wird sehr klein sein, so dass gilt (siehe auch Abbildung 14.4).

$$r'(z) = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad (14.2.2)$$

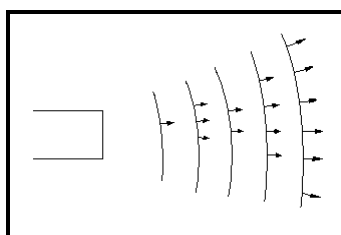


Abbildung 14.3 Strahlen einer Welle in Richtung der Ausbreitung.

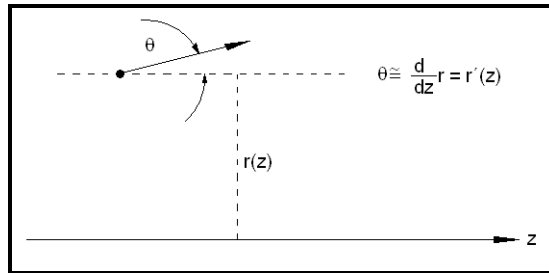


Abbildung 14.4 Ein Strahl zeichnet sich durch seinen seitlichen Abstand  $r$  und dessen Winkel  $r'$  aus, gemessen zur  $z$ -Achse.

Solche Strahlen werden Paraxialstrahlen genannt. Wir gehen davon aus, dass, wie es implizit in unserer Definition des Strahls genannt ist, die Größen Verschiebung  $r$  und Winkel  $r'$  zylindersymmetrisch zur  $z$ -Achse sind. Die Neigung eines Strahls wird positiv oder negativ, je nachdem, ob die Verschiebung  $r$  zu- oder abnehmend ist in Richtung der Ausbreitung.

Wir möchten nun herleiten die Veränderung von Verschiebung  $r$  und Winkel  $r'$  eines Strahls an einem Punkt  $z$  bei der Verschiebung zu einem Punkt  $z'$ . Betrachten wir zum Beispiel den einfachsten Fall, der Ausbreitung im Vakuum von  $z_1$  zu  $z_2$ . Im Vakuum beobachtet man keine Richtungsänderung des Strahls, so das gilt (siehe Abbildung 14.5):

$$r(z_2) = r(z_1) + r'(z_1)(z_2 - z_1) \quad (14.2.3)$$

und

$$r'(z_2) = r'(z_1) \quad (14.2.4)$$

Die Gleichungen (14.2.3) und (14.2.4) können in Matrixnotation geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix} \quad (14.2.5)$$

Ein Strahl ist vollständig durch die  $2 \times 1$  Matrix, oder dessen Spaltenvektor definiert.

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}$$

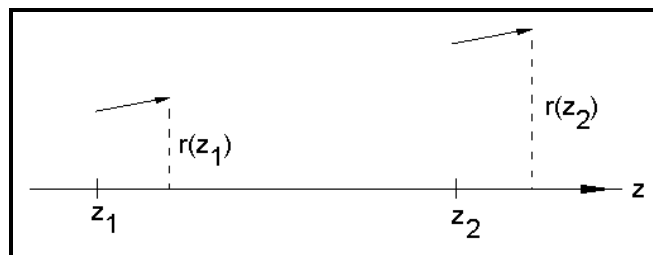


Abbildung 14.5 Die Transformation eines Strahls als Folge des freien Verschiebung über eine Entfernung von  $z_2 - z_1$ .

Die Gleichung (14.2.5) beschreibt die Relation des verschobenen Strahls (final ray)

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} \quad (14.2.6)$$

auf den ersten Strahl (initial ray):

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix} \quad (14.2.7)$$

So, nach Gleichung (14.2.5) ist die Vakuumausbreitung eines Strahls gegeben über einen Abstand  $d = z_2 - z_1$  durch die Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

Bei gegebenen Ausgangsstrahl mit der Verschiebung  $r_i$  und dem Winkel  $r'_i$  sagt uns diese Gleichung, wie dieser Strahl sich verändert infolge der Ausbreitung über die Entfernung  $d$ .

Betrachten wir nun das interessante Beispiel der Transformation eines Paraxialstrahls durch eine dünne Linse der Brennweite  $f$  (Abbildung 14.6). Unmittelbar auf der rechten Seite der Linse besitzen die Strahlen eine seitliche Verschiebung  $r_f$ , welche gleich ist wie die ursprüngliche Verschiebung  $r_i$  auf der linken Seite:

$$r_f = r_i \quad (14.2.9)$$

Die Neigung des Strahls wird jedoch geändert durch die Linse. Über die Gleichung (14.2.10) für dünne Linsen erhalten wir mit der Objekt- und Bildentfernungen, sowie mit der Brennweite des Objektivs (Abb. 14.6):

$$r'_f = r'_i - \frac{r_i}{f} \quad (14.2.10)$$

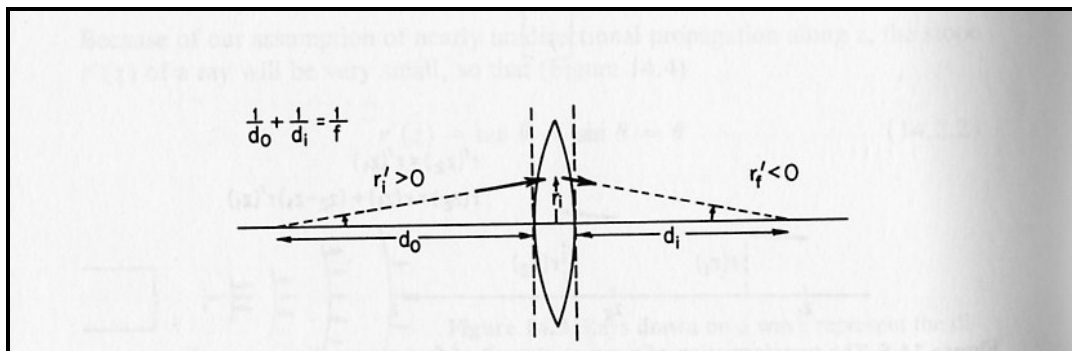


Abbildung 14.6 Die Strahlentransformation an einer dünnen Linse.

In Matrixnotation können die Gleichungen (14.2.9) und (14.2.10) in folgende Form geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.11)$$

Ein weiteres Beispiel ist von Interesse für uns, nämlich den Fall für sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R$ . Die Verschiebung des Strahls ist die gleiche, unmittelbar vor und nach der Reflexion aus dem Spiegel i. e. S.  $r_f = r_i$ . Die Neigung des Strahls nach Reflexion, jedoch ist (Abbildung 14.7)

$$r'_f = r'_i - \frac{2r_i}{R} \quad (14.2.12)$$

In Matrixnotation ist die Strahltransformation am sphärischen Spiegel durch die Gleichung (14.2.13) gegeben:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2R^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.13)$$

Es ist eine Festlegung der Bezeichnung von  $r'$ , dass  $r' > 0$  gilt mit zunehmender Ausbreitung, sonst jedoch  $r' < 0$ . Diese Konvention für den Krümmungsradius  $R$  eines sphärischen Spiegels kann leicht geprüft werden:  $R$  ist positiv für einen konkaven Spiegel (Abbildung 14.7) und negativ für einen konvexen Spiegel. Auch die Brennweite  $f$  einer Linse ist positiv für eine Sammellinse (Abbildung 14.6) und negativ für eine Streulinse. Diese Aussagen können überprüft werden durch die Skizzen, wie sie in Abbildung 14.6 und 14.7 gezeigt sind. So gelten (14.2.11) und (14.2.13) auch für unterschiedliche Streulinsen und konvexe Spiegel, bzw. sofern  $f$  und  $R$  als negativ angenommen werden, für die anderen Fälle.

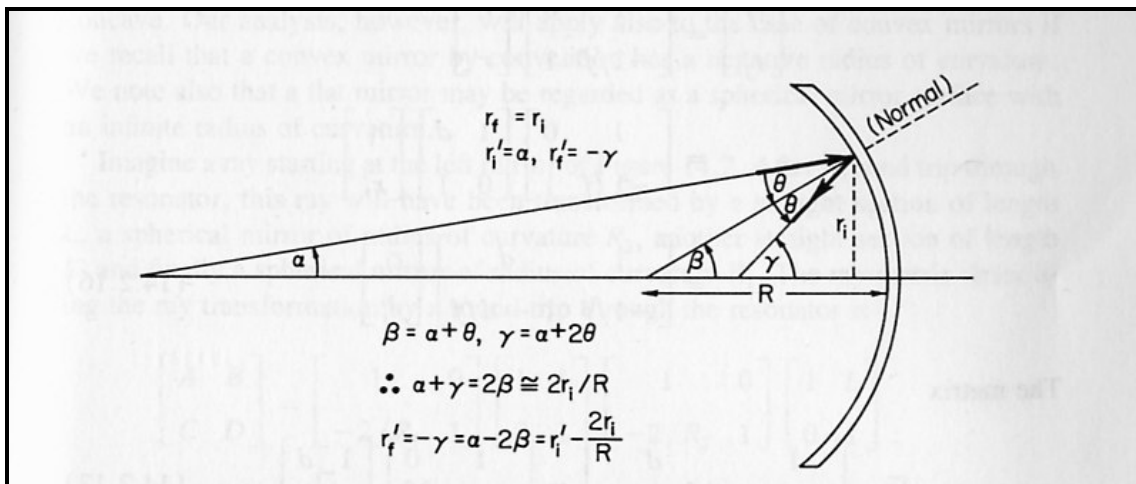


Abbildung 14.7 Paraxialstrahltransformation von einer sphärischen Spiegeloberfläche mit dem Krümmungsradius  $R$ . Das Verhältnis zwischen  $r_f$  und  $r_i$  wird durch die Anwendung des trigonometrischen Satzes erreicht, dass ein äußerer Winkel eines Dreiecks gleich ist der Summe der zwei gegenüberliegenden inneren Winkel, sowie der Näherung  $\beta \approx 2r_i/R$  für Paraxialstrahlen.

Wir haben bisher die Transformation eines Strahls an drei verschiedenen "optischen Elementen" betrachtet, erstens im leeren Raum mit der Länge  $d$ , zweitens an einer dünnen Linse mit der Brennweite  $f$  und drittens an einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R$ . Im Allgemeinen kann demnach die Strahltransformation an einem optischen Element beschrieben werden über die Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (14.2.14)$$

Die  $2 \times 2$  Matrix auf der rechten Seite der Gleichung ist der so genannte Strahlmatrix oder auch ABCD Matrix für ein optisches Element. Die Gleichungen (14.2.8), (14.2.11) und (14.2.13) beschreiben die Strahlmatrizen durch die Länge  $d$  bei der Ausbreitung über ein Vakuum, an einer dünnen Linse mit der Brennweite  $f$  und einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R$ .

Lassen Sie uns überprüfen, welcher Art die Auswirkungen sind auf einen Strahl, wenn nach einem offenen Abschnitt der Länge  $d$  eine dünne Linse der Brennweite  $f$  folgt. Ein Strahl besitzt die Werte  $r_i$  und  $r_i'$  zunächst, dann nach dem offenen Abschnitt ist die Verschiebung  $r$  und die Neigung  $r'$  gegeben durch die Gleichung (14.2.8):

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (14.2.15)$$

Dies ist gegeben unmittelbar nach bevor der Strahl die Linse passiert. Die Verschiebung und die Neigung des endgültigen Strahls sind gegeben durch die Gleichung (14.2.11):

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}$$

⇒

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

⇒

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -f^{-1} & 1 - df^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.16)$$

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -f^{-1} & 1 - df^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.2.17)$$

ist daher die Strahlmatrix für kombinierte optische Systeme, bestehend aus einem offenen Abschnitt der Länge  $d$ , gefolgt von einer dünnen Linse der Brennweite  $f$ . Es ist das Produkt der Strahlmatrizen für eine offene Strecke und einer Linse. Daraus folgt, dass, wenn wir eine beliebige Anzahl von optischen Elementen in einigen Folge reihen, so ist die Strahlmatrix für das System mit allen den optischen Elementen das Matrixprodukt der einzelnen Strahlmatrizen der optischen Einzelemente. Da das Matrixprodukt  $M_1M_2$  ist in der Regel nicht das gleiche wie das Produkt von  $M_2M_1$ , die Reihenfolge der Matrizen mit der das Produkt gebildet wird ist wichtig. Somit ist das Strahlenmatrixsystem gegeben durch die Strahlenmatrix des ersten optischen Elements, multipliziert auf der linken Seite durch die Strahlenmatrix des zweiten optischen Elements, multipliziert auf der linken Seite durch die Strahlenmatrix des dritten Element usw. Der Leser kann nun leicht zeigen, dass zum Beispiel die Strahlenmatrix für ein System, bestehend aus einem offenen Abschnitt gefolgt von einer dünnen Linse sich unterscheidet von der Strahlenmatrix für eine dünne Linse, gefolgt von einem offenen Abschnitt (Problem 14.1). Das bedeutet, dass die Auswirkungen des Systems auf einen Strahl unterschiedlich sind.

### 14.3 Die Resonatorstabilität

Eine der einfachsten, aber auch eine der wichtigen Fragen im Zusammenhang mit einem Laserresonator ist, ob dieser stabil ist oder nicht. Um zu verdeutlichen was das bedeutet, stellt man sich vor wie ein beliebiger (paraxialer) Strahl hin und her läuft zwischen den zwei Spiegeln eines Resonators. Wenn der Strahl nach wie vor innerhalb des Resonators nach einer ausreichend großen Zahl von Reflexionen ist, ist der Resonator stabil. Wenn, wie auch immer der Strahl nach einer noch so großen Anzahl von Reflexionen entweicht, ist der Resonator instabil. Die Abbildung 14.1b zum Beispiel zeigt einen falsch ausgerichteten Spiegel, der Resonator ist instabil. Im Allgemeinen kann das Kriterium für die Stabilität eines Laserresonators ausgedrückt werden durch die Krümmungsradien der Spiegel und durch den Abstand zwischen diesen. Wir werden nun herleiten das Stabilitätskriterium mit Hilfe der ABCD Matrix.

Betrachten Sie den skizzierten Resonator in Abbildung 14.2 bestehend aus Spiegeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  getrennt durch einen Abstand  $L$ . Wie dort dargestellt, sind die Spiegel konkav. Unsere Analyse wird sich aber auch auf den Fall von konvexen Spiegeln erstrecken, wobei daran erinnert sei, dass ein konvexer Spiegel durch die Konvention einen

negativen Krümmungsradius besitzt. Außerdem stellen wir fest, dass auch ein flacher Spiegel als ein sphärischer Spiegel mit einem unendlichen Krümmungsradius angesehen werden kann.

Stellen Sie sich vor, ein Strahl startet am linken Spiegel der Abbildung 14.2. Nach einer Rundreise durch den Resonator hat die Strahlung sich durch den geraden Abschnitt der Länge  $L$ , einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R_2$ , zurück den geraden Abschnitt der Länge  $L$  und schließlich am sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R_1$  fortbewegt. Die unten stehende Strahlmatrix beschreibt die Strahltransformation infolge einer Rundreise durch den Resonator:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2R_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2R_2^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

Nach  $N$ - Rundreisen durch den Resonator gilt dann mit dem ersten Strahl (Verschiebung  $r_i$  und Neigung  $r'_i$ ) transformiert zum finalen Strahl mit der Verschiebung  $r_N$  und der Neigung  $r'_N$ :

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.3.2)$$

Wobei die Strahlmatrix (ABCD) definiert ist durch (14.3.1). Der Strahlmatrix (14.3.1) besitzt folgende Determinante<sup>1)</sup>:

$$AD - BC = 1 \quad (14.3.3)$$

Es wird der Winkel  $\theta$  definiert und genutzt:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D) \quad (14.3.4)$$

Es kann gezeigt werden (siehe dazu weiter unten den Einschub „Nachweis“) das:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \quad (14.3.5)$$

1) Der einfachste Weg dies zu überprüfen ist dadurch möglich, dass man die Strahlenmatrix (14.3.1) betrachtet. So ist diese ein Produkt von vier Matrizen, mit jeweils der Determinante eins. Da die Determinante eines Matrizenprodukts gleich ist dem Produkt der Einzeldeterminanten folgt daraus (14.3.3)

---

**Einschub „Nachweis“:**

Das Ergebnis (14.3.5) für eine 2 x 2 Matrix erfüllt (14.3.3) und wird manchmal auch "Sylvesters Theorem" genannt. Es kann durch Induktion bewiesen werden. So gilt (14.3.5) für  $N = 1$  und wir versuchen zu zeigen, dass wenn es für ein festes, beliebiges  $N$  gilt, muss es auch für  $N + 1$  richtig sein. Wenn wir dies zeigen können, ist das „Sylvester Theorem“ bewiesen.

Nehmen wir an, dass (14.3.5) gilt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta & B(A+D) \sin N\theta - B \sin(N-1)\theta \\ C(A+D) \sin N\theta - C \sin(N-1)\theta & (BC + D^2) \sin N\theta - D \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.3.6)$$

Mit (14.3.3) und (14.3.4) sehen wir, dass das (1,1)- Element dieser Matrix ist:

$$\begin{aligned} & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta = (A^2 + AD - 1) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta \\ \Rightarrow & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta = A(A+D) \sin N\theta - \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta \\ \Rightarrow & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta = 2A \sin N\theta \cos \theta - \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta \\ \Rightarrow & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta = 2A \left[ \frac{1}{2} \sin(N+1)\theta + \frac{1}{2} \sin(N-1)\theta \right] - \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta \\ \Rightarrow & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta = A \sin(N+1)\theta - \sin N\theta \end{aligned} \quad (14.3.7)$$

Die verbleibenden drei Elemente aus (14.3.6) werden analog behandelt. Wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A \sin(N+1)\theta - \sin N\theta & B \sin(N+1)\theta \\ C \sin(N+1)\theta & D \sin(N+1)\theta - \sin N\theta \end{bmatrix} \quad (14.3.8)$$

Aber das ist nun mal die Gleichung (14.3.5) mit  $N$  ersetzt durch  $N + 1$ . So gilt (14.3.5) auch für  $N = 1$ , und wir haben gerade gezeigt, dass, wenn es gilt für alle  $N$ , dann muss es auch richtig sein für  $N + 1$ . Dies beweist das Theorem von Sylvester.

---



Es folgt jetzt aus Gleichung (14.3.2):

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r'_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

wobei durch (14.3.4) und (14.3.1) der Term  $\cos\theta$  definiert wird:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2L}{R_2} + 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \quad (14.3.10)$$

Die Gleichung (14.3.9) gibt die Verschiebung und die Neigung eines Strahls nach N Rundreisen durch den Resonator an. Wir beobachten, dass  $r_N$  (und  $r'_N$ ) endlich bleiben solange  $\theta$  ein realer Wert ist. Wenn  $\theta$  eine komplexe ist, dann wird  $\sin N\theta = (e^{iN\theta} - e^{-iN\theta})/(2i)$  sehr groß für große N und in der Tat divergiert  $N \rightarrow \infty$ . Mit anderen Worten, wenn  $\theta$  ist nicht rein real, die Verschiebung  $r_N$  selbst divergiert, i. e. S. der Strahl wird aus dem Resonator entweichen. Damit ist die Voraussetzung für die Stabilität eines Resonator gegeben, was für  $\theta$  bedeutet, es muss real sein bzw. es gilt  $|\cos\theta| \leq 1$ , aus (14.3.10) folgt:

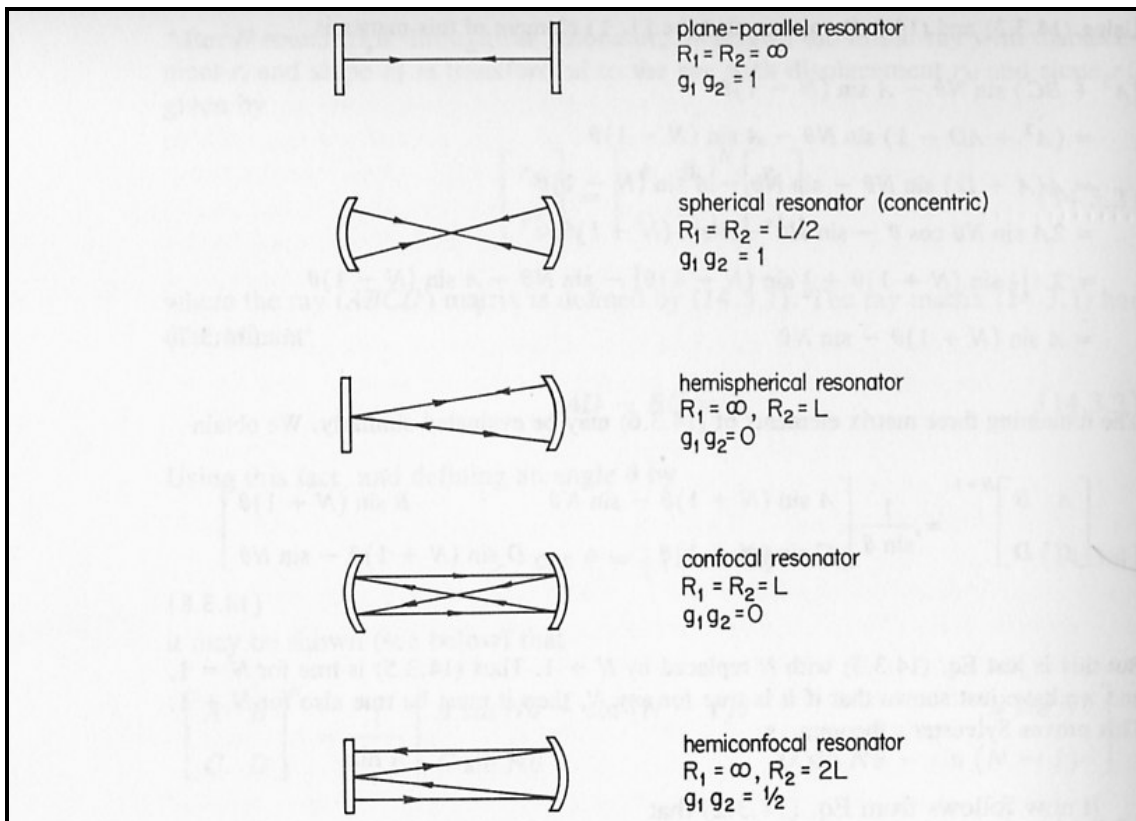


Abbildung 14.8 Beispiele für stabile Resonatoren.

$$-1 \leq 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$-2 \leq -\frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 0$$

⇒

$$0 \leq 1 - \frac{L}{R_1} - \frac{L}{R_2} + \frac{L^2}{R_1 R_2} \leq 1 \quad (14.3.11)$$

Diese Stabilitätsbedingung wird in der Laserliteratur genutzt:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (14.3.12)$$

Wobei:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad (14.3.13a)$$

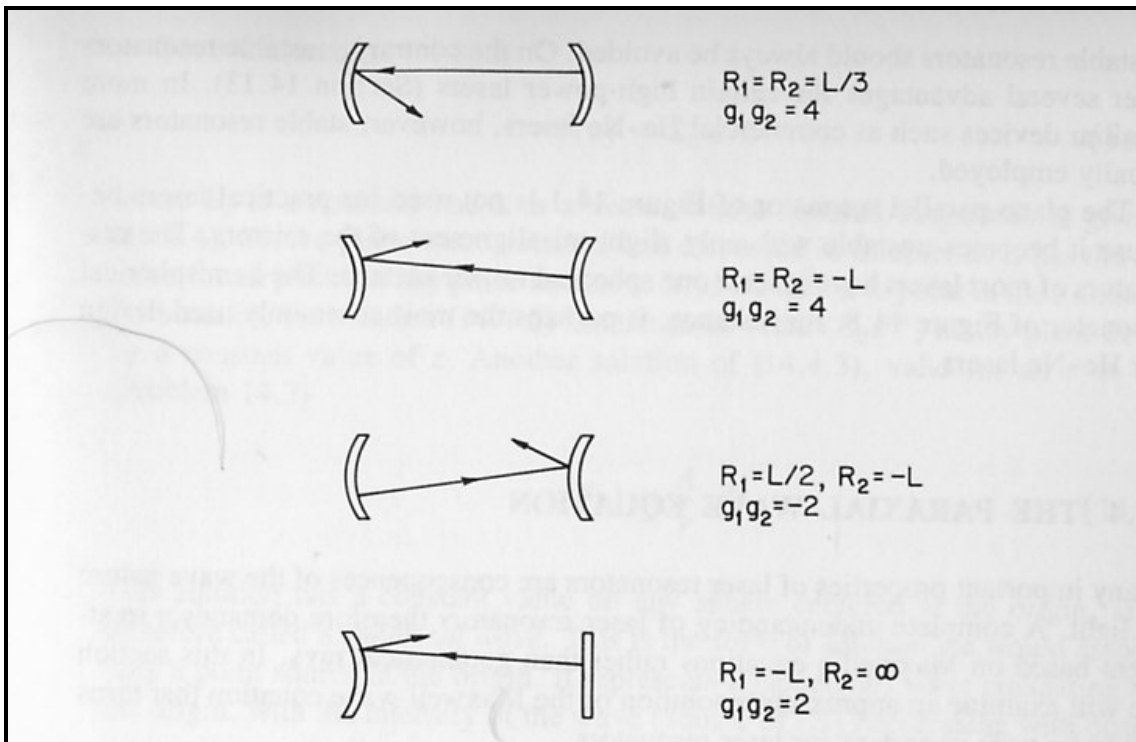


Abbildung 14.9 Beispiele für instabilen Resonatoren.

Sowie:

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} \quad (14.3.13b)$$

Diese nennt man die  $g$ - Parameter des Resonators. Wenn die  $g$ - Parameter so groß sind, dass die Gleichung (14.3.12) erfüllt ist, ist der Resonator stabil. Wenn  $g_1 g_2 < 0$  oder  $g_1 g_2 > 1$  ist der Resonator instabil.

Der Strahlmatrixansatz ermöglicht es uns, sofort prüfen, ob eine bestimmter Resonator stabil ist, also ohne dass eine Spur an Strahlung, wie in Abbildung 14.1b dargestellt, entweicht. Ob ein bestimmter Resonator stabil oder instabil ist, hängt nur ab von den Radien der Spiegelkrümmungen dem Abstand zwischen diesen. Die Abbildungen 14.8 und 14.9 zeigen Beispiele für stabile und instabile Resonatoren. Der Leser kann leicht selbst überprüfen, für jeden Fall, ob der Resonator stabil oder instabil ist (Problem 14.2).

Unsere Analyse der Stabilität hat Reflexionen an perfekten Spiegeln angenommen. In der Realität wird natürlich eine gewisse Menge an Energie aus dem Inneren des Lasers entweichen, da die Spiegel nur unvollkommen reflektieren. Wir haben bereits festgestellt (Kapitel 10), dass die Auskopplung durch einen (oder durch beide) Spiegel eben ein Verlustmechanismus darstellt. Zusätzlich zu solchen Verlustmechanismen kommen Streuung oder Absorption dazu. Ein Laser mit instabilen Resonatoren haben große Verluste durch den Verlust von Strahlung nach den Spiegeln, wie gezeigt an den Strahlenbildern in den Abbildungen 14.1b und 14.9. Infolge dieser zusätzlichen Verlustfaktoren, erfordern instabile Resonatoren typischerweise Lasermedien mit einem höheren Gewinn um die Laserstrahlung erhalten zu können. Das soll nicht heißen, dass instabile Resonatoren grundsätzlich vermieden werden sollten. Im Gegenteil, instabile Resonatoren bieten verschiedene Vorteile für bestimmte leistungsstarke Laser (Abschnitt 14.13). In handelsüblichen Geräten wie kommerzielle He- Ne- Laser sind jedoch stabile Resonatoren die Regel.

Die planparallelen Resonatoren der Abbildung 14.1 sind nicht praktisch geeignet für Laser, weil sie leicht instabil werden mit nur einer leichten Fehlstellung der Spiegel. Die Resonatoren der meisten Laser haben mindestens eine sphärische Spiegelfläche. Der hemisphärische Resonator in Abbildung 14.8 zum Beispiel, ist vielleicht das am häufigsten verwendete Design für He- Ne- Laser.

### 14.13 Instabile Resonatoren für Hochleistungslaser

Unser Schwerpunkt auf stabile Laserresonatoren soll nicht zu bedeuten, dass instabile Resonatoren keine praktische Bedeutung haben. Im Gegenteil, instabile Resonatoren besitzen bestimmte Vorteile und sie sind von wesentlicher Bedeutung für die Konstruktion von vielen wichtigen leistungsstarken Lasern.

Stabile Resonatoren haben ein paar Nachteile, bei der Nutzung leistungsstarker Geräte. Ein großer Nachteil ist, dass der Arbeitsbereich der stabilen Resonatoren sind in der Regel sich konzentrieren in sehr dünnen, nadelähnlichen Regionen innerhalb der Resonator. Daher wird ein sehr großer Teil der Verstärkungswirkung des Mediums nicht genutzt, was natürlich ein Problem darstellt, wenn eine hohe Leistung aus dem Laser erwünscht ist. Eine Mode mit Gaußscher Verteilung in einem stabilen Resonator, zum Beispiel, hat eine Strahlgröße von  $(\lambda L/\pi)^{1/2}$  [siehe Gleichung (14.7.21)]. Für CO<sub>2</sub>-Laser mit  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  und  $L = 1 \text{ m}$ :

$$\sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} = 1,8[\text{mm}]$$

Was eine typische Strahlgröße für Moden Gaußscher Verteilung mit stabilen Resonatoren darstellt.

Instabile Resonatoren jedoch beinhalten in der Regel eine viel größere Menge an Moden und können somit besser das Medium als Verstärker nutzen. Abbildung 14.33 zeigt ein wichtiges praktisches Beispiel für einen instabile Resonator, einen so genannten positiven, (weil  $g_1 g_2 > 1$ ) kofokalen Resonator. Wie bereits erwähnt, das innere Feld füllt einen großen Teil des Laserraumes aus und kann durch den Einsatz größerer Spiegel verbreitert werden. Die "Vergrößerung"  $M$  ist nur eine Funktion von den  $g$ - Parametern der Spiegel.

Iterative Berechnungen der Fox - Li Art zeigen, dass die Art und Weise der instabilen Resonatoren, wie in Abbildung 14.33 gezeigt, deutlich nichtgausscher Art sind. In erster Näherung, die niedrigste, ausgekoppelte Mode hat eine fast einheitliche Intensität auf den Spiegeln. Der ausgegebene Strahl für diesen Resonatortyp wird in Abbildung 14.33 gezeigt und ist ein gleichförmiger ( doughnutartiger ) Ring im nahen Bereich des Resonators.

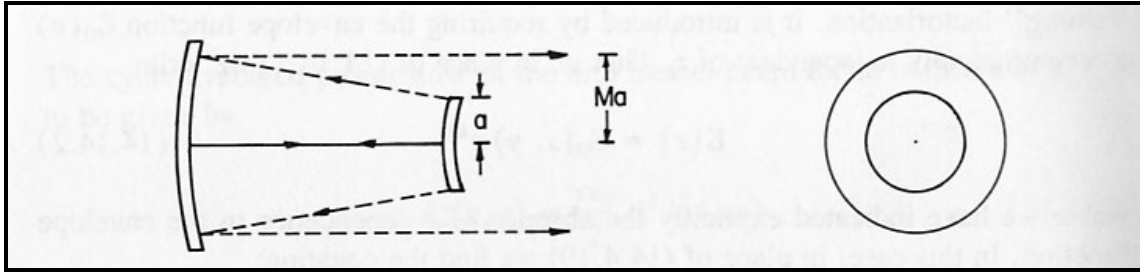


Abbildung 14.33 Eine positive, ( $g_1 g_2 > 1$ ) kofokaler, instabiler Resonator. Der Nahfeld- Bereich ergibt einen gebündelten, ringförmigen Strahl.

Im Fernfeld- Bereich hat dieser Strahl eine zentralen, hellen Fleck auf Achse. Im Randbereich ist ein Airy- Muster zu erkennen mit einer Konzentration der Intensität im zentralen Lichtfleck.

Instabile Resonatoren bieten weitere Vorteile zusätzlich zu ihrer großen Anzahl an Moden. Zum Beispiel neigen sie dazu, sich zu rentieren, wenn größere Leistungen vorhanden, diese auf den niedrigsten Verlustmodus zu verteilen als auf mehreren (oder viele) andere Modi. Diese Eigenschaft teilen nicht im Allgemein alle stabile Laserresonatoren ist aber ein wichtiger Vorteil in vielen Anwendungen. Darüber hinaus instabile Laserresonatoren nutzen die gesamte reflektierende Optik. Das heißt, die Leistung geht nicht durch alle Spiegel gleichmäßig hindurch, sondern entweicht lediglich um die Spiegelkanten. Bei hoher Leistung, sind Spiegelschäden ist ein wichtiger Aspekt, da die Spiegel sich oft ohne große Schwierigkeiten hier wasserkühlen lassen. Dieses Problem der Spiegelbeschädigungen sowie thermische Verzerrung sind nicht so einfach unüberwindbar in stabilen Laserresonatoren, bei Nutzung einer transmissiven Auskopplung über halbdurchlässige Gläser

Die fundamentale Theorie der instabilen Laserresonatoren ist nicht schwieriger als die der stabilen Laserresonatoren. Aus diesem Grund und weil stabile Resonatoren häufiger genutzt werden, werden wir hier nicht in jedem Detail die Modenmerkmale instabiler Resonatoren getrennt beschreiben.